Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Výuka inverzní funkce na střední škole

Teaching inverse function in high school

Autor diplomové práce : Jakub Votoček
Vedoucí práce: RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Praha 2009

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně
pod vedením RNDr. Jaroslava Zhoufa, Ph.D.
V práci jsem použil informační zdroje
uvedené v seznamu literatury.

V Praze dne 20. listopadu 2009 __________________________.

Jakub Votoček

Děkuji mému vedoucímu diplomové práce, RNDr. Jaroslavovi Zhoufovi, Ph.D., za jeho obrovskou trpělivost, cenné rady, náměty a připomínky, jež mi pomohly při psaní diplomové práce. Můj dík si zaslouží také rodina, jež měla dost pochopení a dávala mi dostatek prostoru k práci.

Anotace

V první části diplomové práce uvádím, jaké informace o inverzních funkcích může naleznout běžný student střední školy v nejčastěji používaných učebnicích, shrnutích a sbírkách vhodných pro opakování k maturitě a pro přípravu na přijímací zkoušky ke studiu na vysoké škole. Také se zaměřuji na informace, které se vyskytují na internetu. Tyto informace analyzuji a shrnuji celkovou situaci pro studenty.

V další části práce popisuji, jak vyučuji téma inverzní funkce na SOA Stodůlky. Výuku provádím jiným než běžným způsobem. Přikládám několik studentských prací, které analyzuji a snažím se pochopit utváření pojmu inverzní funkce u studentů. To vše dělám pro jednodušší pochopení pojmu logaritmus studenty.

V závěru práce porovnávám svou výuku s výukou běžnou.

Annotation

In the first part of the thesis, I mention which kind of information about the inverse function current students of high school can find in the most commonly used textbooks, summaries and collections suitable for the revision for the final exam and for preparing for entrance exams at universities. I also focus on information that is on Internet. The information analyzes and summarizes the overall situation for students.

In the next part of the work, I describe how I teach the subject of inverse function in SOA Stodůlky. My teaching is done in the way which is different from normal way. I do all these things in order to students could understand the concept of the logarithm more simple.

At the end of the work, I analyze all my teaching.

Obsah

Úvod

Proč jsem si vybral za téma diplomové práce zrovna inverzní funkci? Při své dosavadní pedagogické praxi jsem u studentů postřehl problém s pochopením kapitoly logaritmická funkce. Zatím jsem matematiku vyučoval na dvou různých středních školách, a to na gymnáziu Or Chadaš a na Soukromé obchodní akademii Stodůlky. Na obou školách jsem se setkával se skoro stejným (ne)pochopením problematiky ze strany studentů. Ve většině středoškolských učebnic matematiky je pojem logaritmus striktně definován a logaritmická funkce se zavádí jako funkce inverzní k funkci exponenciální. Avšak funkce inverzní zde vystupuje pouze jako prostředek k zavedení logaritmické funkce. Ve většině případů oba nové pojmy jsou zaváděny v jedné kapitole, a tudíž splývají jejich významy, navzájem se studentům pletou a ve většině případů si studenti nemohou plnohodnotně osvojit danou problematiku. V některých učebnicích matematiky pro střední školy o inverzní funkci není zmínka dokonce vůbec.

V diplomové práci ukážu, jak je problematika okolo inverzní funkce prezentována v některých matematických publikacích. V další části diplomové práce seznámím čtenáře se způsobem, jakým jsem učební látku týkající se inverzní funkce odučil v několika druhých ročnících Soukromé obchodní akademie Stodůlky. Tuto učební látku jsem studentům vysvětloval pomocí několika příkladů, které jsou v řešené formě součástí této diplomové práce. Ukázku některých studentských prací nalezneme v příloze. V závěru uvádím sbírku gradovaných řešených úloh a několik gradovaných příkladů na procvičení.

Celou problematiku jsem v rámci propojení mimo předmětových vztahů zpracovával pomocí výpočetní techniky. K tomu jsem zvolil program MS EXCEL, který je v dnešní době instalován na téměř každém počítači a ovládání tohoto programu má patřit k základnímu vzdělání každého středoškoláka. Pro zpracování pomocí výpočetní techniky jsem se rozhodl hlavně proto, že i v dnešní době je na druhém stupni většiny základních škol informatika zařazována pouze do jedné hodiny týdně, a to jen v šesté třídě. Na středních školách a hlavně na některých gymnáziích se studenti s informatikou a výpočetní technikou setkají za celou dobu studia pouze dvakrát týdně v prvním ročníku. To vše mě vedlo k tomu, abych i v této diplomové práci využil výpočetní techniku a rozvíjel počítačovou gramotnost studentů, neb výpočetní technika matematikovi velmi pomáhá a usnadní mnoho rutinní práce.

Kapitola 1

Inverzní funkce v učebnicích a jiných matematických publikacích

V této části práce se podíváme do několika běžných učebnic, sbírek a přehledů, které jsou pro studenty nejdosažitelnější. Nebudu se věnovat publikacím starším a ani zahraničním, chci ukázat situaci dostupnou každému středoškolákovi. Je jisté, že existuje určité procento středoškoláků, které je schopno pracovat se zahraničními učebnicemi, ale o tom psát nechci.

Studenti gymnázií se poprvé s inverzní funkcí setkají ve druhém ročníku na stánkách učebnice O. Odvárka [8]. Autor této publikace zde uvádí na dvou stránkách motivační příklady vedoucí k sestavení definice inverzní funkce, kterou zde uvádím[1]. Dále následuje řešený příklad, který vyúsťuje v informaci o tom, že grafy funkce a inverzní funkce jsou souměrně sdruženy podle přímky $y = x$.

K učebnici napsal O. Odvárko ještě sbírku [9]. V této sbírce je inverzní funkci věnována jedna kapitola. Kapitola 4. 4 Inverzní funkce má rozsah dvou stránek formátu A5. Výklad zde není žádný, jelikož tato sbírka doplňuje předchozí učebnici. Autor uvádí jen stejnou definici inverzní funkce jako v předešlé publikaci. Dále je zde zadání deseti úloh a informace o tom, že grafy funkce a inverzní funkce sestrojené v téže soustavě souřadnic jsou osově souměrné.

Publikace [14] od J. Petákové je velmi často používanou sbírkou na

---

[1] Inverzní funkce k *prosté* funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí:

1. $D_{f^{-1}} = H_f$.
2. Každému $y \in D_{f^{-1}}$ je přiřazeno právě to $x \in D_f$, pro které je $f(x) = y$.

gymnáziích. Přestože se tato kniha jmenuje Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysokou školu, jedná se o sbírku úloh s výsledky. V této sbírce v kapitole Inverzní funkce jsou zadání dvou úloh s celkem 24 funkcemi, ke kterým se má určit funkce inverzní. Dále se s inverzní funkcí setkáme v kapitolách Inverzní funkce k funkcím mocninným, Inverzní funkce k funkci lineární lomené a v prvních čtyřech úlohách v kapitole Cyklometrické funkce.

Kolektiv autorů O. Odvárko, J. Řepová a L. Skřítek napsal publikace [12] a [13]. Mezi vydáním těchto učebnic uběhlo deset let a každou z publikací vydalo jiné nakladatelství, ale jedná se prakticky o stejnou knihu. Tak tomu je i u publikací [10] a [11] autorů O. Odvárka, E. Caldy, J. Kolouchové a J. Řepové. Tyto učebnice jsou určeny pro studenty středních odborných škol a studenty studijních oborů středních odborných učilišť. V části 2 ani v části 6, ve kterých jsou funkce probírány, není vůbec zmínka o inverzní funkci.

Oproti tomu sbírka [5] F. Jiráska, K. Baniše, S. Horáka a M. Vacka zavádí inverzní funkci pomocí definice. Autoři zde uvádějí jeden řešený příklad a tři neřešené příklady.

V učebnicích [13], [11] pro SOŠ a studijní obory SOU o inverzní funkci není ani zmínka. Naopak ve sbírce [5], která řadu učebnic doplňuje, se vyskytuje několik úloh, v jejichž zadání se inverzní funkce objevuje.

J. Koldner ve sbírce [7] pro obchodní akademie inverzní funkci vůbec neuvádí.

Autorky M. Rosická a L. Eliášová v publikaci [16], která je opakující přípravou k přijímacím zkouškám na VŠE, věnují inverzní funkci čtyři řádky[2] v kapitole 2.2 Vlastnosti reálných funkcí, definiční obory. Následuje několik

[2] Je-li f funkce prostá v množině D(f), je relace f^{-1} opět funkce, která se nazývá inverzní funkce. Potom platí: $D(f) = H(f^{-1}) \wedge H(f) = D(f^{-1})$. Grafy funkcí f a f^{-1} jsou navzájem souměrné podle osy I. a III. kvadrantu.

stránek cvičení a ani v jedné z úloh není o inverzní funkci zmínka.

J. Polák ve svém přehledu [15] v kapitole Prosté funkce a funkce k nim inverzní inverzní funkci definuje[3]. Následně popisuje geometrickou transformaci kartézské soustavy souřadnic *Oxy* pomocí osové souměrnosti podle osy I. a III. kvadrantu, tj. podle přímky o rovnici $y = x$. Dále zde uvádí dvě věty o inverzních funkcích[4]. Na závěr kapitoly o inverzní funkci uvádí autor řešený příklad, to vše doplňuje obrázky.

Autoří S. Horák V. Jalůvka, F. Jirásek, J. Kroupová a J. Polášek ve svých Požadavcích k přijímacím zkouškám [03] pojem inverzní funkce neuvádějí.

F. Jirásek, E. Kriegelstein a Z. Tichý vytvořily sbírku [6]. V této sbírce je mezi základními pojmy v kapitole Funkce jedné proměnné inverzní funkce definována pomocí geometrické transformace. Dále je inverzní funkce využita při zavádění funkcí cyklometrických a hyperbolometrických. V řešených příkladech se inverzní funkce vyskytuje ve čtyřech případech. Kolektiv autorů publikace využívá vzájemný inverzní vztah mezi exponenciální a logaritmickou funkcí, přestože se při zavádění logaritmické funkce o něm nezmínil.

Přehled vzorců [1] J. H. Bartsche je první z knih určené především studentům vysokých škol, kterou jsem se zabýval. Inverzní funkci je věnována samostatná kapitola. Nejprve je zde definice inverzní funkce. Dále autor popisuje záměnu x a y v analytickém zadání funkce, pomocí čehož získá analytický předpis pro funkci inverzní. Následuje řešený příklad. O třináct stránek

---

[3] Inverzní funkci k funkci f značíme f^{-1} a platí pro ni

$$f^{-1}\colon x = f^{-1}(y),\ D(f^{-1}) = H(f) \text{ a } H(f^{-1}) = D(f),$$

přičemž

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x) \text{ pro každé } x \in D(f) = H(f^{-1}),\ y \in H(f) = D(f^{-1}).$$

[4] V.1. K funkci f existuje, a to jediná, inverzní funkce f^{-1}, právě když je funkce f prostá.
V.2. Je-li funkce f rostoucí, pak k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je také rostoucí. Je-li funkce f klesající, pak k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je též klesající.

dále je zmínka o tom, že graf inverzní funkce lze sestrojit pomocí osové souměrnosti. Následuje obrázek grafů vzájemně inverzních funkcí $y = x^3$ a $y = \sqrt[3]{x}$ a druhý obrázek funkcí $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$. V následujících částech knihy je inverzní funkce použita pří zavádění funkce logaritmus, funkcí cyklometrických, funkcí hyperbolometrických.

V knize [2] M. Hejného a kol. není o inverzní funkci ani zmínka.

V Diferenciálním počtu (1) [4] V. Jarníka je inverzní funkci věnována celá kapitola obsahující dva paragrafy o rozsahu 12 stran. Nejprve zde autor ukazuje, že každá spojitá funkce v intervalu J zobrazuje interval J na jednobodovou množinu nebo na interval J_1. V další části autor tvrdí a ukazuje, že každá spojitá prostá funkce svůj definiční obor zobrazuje vzájemně jednoznačně na interval J_1. Funkci φ, která přiřazuje hodnotám z intervalu J_1 hodnoty z intervalu J, nazývá inverzní funkce. V další části kapitoly V. Jarník tvrdí a dokazuje vlastnost inverzní funkce: je-li f rostoucí v J, je φ rostoucí v J_1, a naopak. Následně dokazuje pomocí ε, δ okolí spojitost inverzní funkce. V poslední poznámce této části kapitoly ukazuje autor, že inverzní funkce k funkci φ je funkce f. To vše je doplněno mnoha příklady a cvičeními.

Ve druhém paragrafu se V. Jarník zabývá cyklometrickými funkcemi a inverzními funkcemi k nim. Vše je doplněno předpoklady, příklady, důkazy, obrázky a cvičeními. Závěrečné příklady cvičení jsou věnovány funkcím hyperbolickým. Je zajímavé, že o vztahu funkce exponenciální a funkce logaritmické v této kapitole není žádná zmínka.

Situace okolo inverzní funkce se mi zdá být celkem nevyvážená. Omezíme-li se pouze na knižní literaturu, tak mezi středoškolskou literaturou je velký rozdíl. Některé řady učebnic inverzní funkci neobsahují, ale sbírka k nim vydaná příklady s touto tématikou obsahuje. Sbírka pro střední ekonomickou školu inverzní funkci neobsahuje, ale vysoká škola ekonomická ji ve svých požadavcích má. Z tohoto pohledu jen gymnaziální řada je v pořádku.

Obě publikace pro vysokoškoláky informaci o inverzní funkci obsahují na odpovídající úrovni se všemi podmínkami a důkazy.

Kapitola 2

Inverzní funkce na internetu

V této části diplomové práce se podívám na internet, čímž chci přiblížit část toho, co se může najít v mezinárodní počítačové síti. Zkusím se podívat na to, co vyhledají některé internetové vyhledávače. Zaměřím se na několik vyhledávačů českých, pracujících s českým jazykem. Následně budu zjišťovat situaci na některých mezinárodních vyhledávačích pracující s jazykem anglickým. Nahlédnu i do některých encyklopedií. Již v tuto chvíli je jasné to, že budu prohlížet jen zlomek ze všech informací, které internet nabízí. Přestože informace, které internet nabízí, nejsou vždy seriózní, tak se této problematice věnuji poměrně podrobně. Většina středoškolských studentů se rozhodne hledat informace právě na neseriózním internetu, místo aby se podívali do tištěné literatury. V dnešní době je to dané tím, že počítač s připojením na internet má téměř každý doma, kdežto do knihovny se musí kvůli půjčení jedné knihy zajít nejméně dvakrát.

Na začátku ještě musím zdůraznit, že všechny zde uváděné články jsem záměrně neupravoval a ponechal tak, jak je autor umístil na internet. Proto se nedivme, že v částech pod čarou někdy najdeme nesmyslný text, různé velikosti textu, neostrý nebo rozmazaný text a někdy i chyby.

Začal jsem českým vyhledávačem na serveru www.centrum.cz. Pokud se do vyhledávače centrum.cz zadá inverzní funkce, server vyhledá přes 6 tisíc odkazů, ve kterých se někde vyskytují slova „inverzní“ nebo „funkce“. Mezi těmito odkazy je velká většina odkazů, které s inverzní funkcí nemají nic společného, neboť vyhledávač vyhledá všechny dostupné internetové stránky, ve které se kdekoli vyskytnou slova „inverzní“ nebo „funkce“ nezávisle na umístění v textu.

Zadáním hesla „inverzní funkce“ se počet vyhledaných stránek redukuje pouze na stránky obsahující slova inverzní funkce za sebou. I přes to internetový vyhledávač www.centrum.cz vyhledá přes 760 stránek, ve kterých se vyskytuje inverzní funkce. Mezi těmito stránkami je ještě stále dost stránek, které s inverzní funkcí z pohledu matematiky nemají mnoho společného. Některé odkazy jsou zcela nesmyslné a inverzní funkce se v nich vůbec nevyskytuje. Stránkami zabývajícími se problematikou inverzní funkce transformátoru, nebo nějakého měřícího přístroje se nebudu zdržovat.

Hodně odkazů vede k prodeji kalkulaček. Některé nabízené kalkulačky jsou programovatelné a umí utvořit inverzní funkci. Většina z nabízených kalkulaček umí „pouze“ vypočítat hodnoty inverzních funkcí k funkcím goniometrickýchm.

Další skupinou odkazů jsou odkazy na opakovací okruhy k maturitě, nebo třeba katalog požadavků k maturitní zkoušce, kde se pojem inverzní funkce vyskytuje jen jako zmínka takto: „určit funkci inverzní k dané funkci“.

Dále zde nacházíme mnoho nabídek kurzů a doučování pro studenty gymnázií a prvních ročníků vysokých škol. Nesmíme opomenout ani sylaby matematické analýzy na vysokých školách.

V odkazech vysokoškoláků a nebo pro vysokoškoláky se inverzní funkce vyskytuje ve velké většině jako nástroj pro další výpočty.

Konečně se dostávám ke konkrétním článkům, které se zabývají, nebo pokoušejí zabývat výkladem inverzní funkce. Mezi těmito stránkami je několik stránek převzatých z jiných zahraničních serverů; například na serveru www.navajo.cz je článek, u kterého nahoře na stránce malým písmem najdeme informaci: *Experimentální strojový překlad hesla inverse function z encyklopedie Wikipedia pořízený překladačem Eurotran* [17]. Tento článek jsem záměrně neupravoval a uvedl zde v té podobě, jak se na internetu nachází. Místy nesmyslný text, chaotické formátování a některé části textu v jiné velikosti a ještě mírně rozmazané jsou jen technickou nedokonalostí článku[5]. Je pravda, že člověk, který inverzní funkci zná a pracoval s ní, se v článku vyzná s obtížemi. Toho, kdo se chce inverzní funkci naučit a nejprve se setká s tímto článkem, upřímně lituji. Pokud ho neodradí nesmyslný text, tak zajisté samostatně není schopen problematiku inverzní funkce nastudovat.

Veliká nevýhoda otevřených encyklopedií na internetu je ta, že do nich může kdokoli umístit jakoukoli informaci. Než provozovatel ověří pravdivost takovýchto informací, a někdy toho ani není schopen, je tato informace volně přístupná všem uživatelům internetu. Další nevýhodou jsou převzaté zahraniční články, které při překladu mohou být poměrně hodně zkresleny. Příkladem je výše uvedený článek. Mně osobně se nepovedlo najít původní článek, ale jsem přesvědčen, že původní článek je matematicky korektnější. Článek pokračuje existenčními podmínkami a vlastnostmi inverzní funkce. Další zajímavostí je to, co o inverzní funkci uvádí právě encyklopedie Wikipedia. Přestože první článek je převzat z encyklopedie Wikipedia a druhý článek je nalezen přímo na stránkách encyklopedie Wikipedia, jedná se o dva naprosto

---

[5] V matematice, inverzní funkce je v jednoduchých termínech funkce který “dělá zpáteční rychlost” dané funkce. Více formálně, jestliže *f* je funkce s doménou *X*, pak f^{-1} je jeho inverzní funkce jestliže a jediný jestliže pro každý $x \in X$ my máme: $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Například, jestliže funkce *x* =3*x* + 2 je dáván, pak jeho inverzní funkce je *x* ? (*x*? 2) / 3. Toto je obvykle psáno jak: $f\colon x \to 3x+2$, $f^{-1}\colon x \to (x-2)/3$

Horní index #lquote? 1” je ne exponent. Podobně, jak dlouho jak my nejsme v trigonometrii nebo počtu, $f^{2}(x)$ prostředky “dělat *f* dvakrát”, to je *f*(*f*(*x*)), ne čtverec *f*(*x*). Například, jestliže : *f* : *x* ? 3*x* + 2, pak f^{2} : *x* = 3 ((3*x* + 2)) + 2, nebo 9*x* + 8. Nicméně, v trigonometrii, pro historické důvody, hřešit^2(*x*) obvykle *laně* znamenat čtverec hříchu (*x*). Jako takový, předpona *oblouk* je někdy používán naznačovat inverzní goniometrické funkce, např. arcsin *x* pro nepřímou úměrnost hříchu (*x*). V počtu, $f^{n}(x)$ je derivát nth *f*. Jestliže funkce *f* má inverzní pak *f* je řekl, aby byl invertible. [17]

diametrálně odlišné články. Článek druhý[6] obsahuje více hypertextových odkazů a tím se stává ještě méně přehledným. Je zde jen definice a chybí jakýkoliv příklad či obrázek.

Další článek[7] je převzat ze zahraničního serveru. I na tomto článku je vidět jistou nekorektnost v zavádění inverzní funkce. Chybí zde podmínky pro funkci *f*. Jazyk, ve kterém autor článek vytvořil, je více či méně lidový. Používat výrazy jako „z funkce vyleze jednička“ mi přijde velmi nevhodné

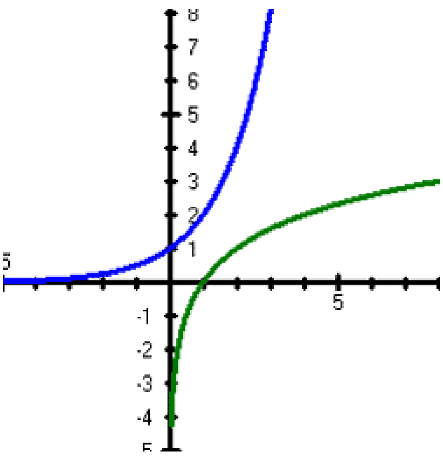
---

[6] Inverzní funkce

Mějme funkci *y* = *f*(*x*) s definičním oborem *D* s oborem hodnot *V*. **Inverzní funkcí** k funkci *f* nazveme funkci *x* = *g*(*y*) s definičním oborem *V*, která každému $y \in V$ přiřadí právě to $x \in D$, pro které platí *y* = *f*(*x*). Inverzní funkce k funkce *f* bývá také zapisována jako f^{-1}.

Je-li *f* prostá funkce, pak k ní lze nalézt inverzní funkci. V takovém případě je graf inverzní funkce k *f* osově souměrný s grafem *f* podle osy 1. a 3. kvadrantu. Z toho plyne, že identická funkce *f*(*x*) = *x* je inverzní sama k sobě. [18]

[7] Inverzní funkce je opačná funkce k nejaké jiné funkci. Zkrátka ak pôvodní funkce f zobrazuje prvky z množiny M do množiny N, pak inverzní funkce f^{-1} zobrazuje prvky z množiny N do množiny M. Ak máme napríklad lineární funkce y = 2x a y = ½x, sú to navzájem inverzní funkce, neboť keď do první rovnice dosadíme za x jedničku, vyjde nám y = 2. Ak tuto dvojku dosadíme do druhé funkce, po dlouhém výpočtu nám z funkce vyleze jednička. První funkce zobrazuje 1 → 2 a druhá funkce 2 → 1. Na grafu sa navzájem inverzní funkce projevují osovou soumerností podle osy prvního a tretího kvadrantu (jakoby grafu funkce y = x).



navzájem inverzní funkce - logaritmus a exponenciála. [19]

ve článku, který autor umístil na internet. Osobně ho odhaduji autora na studenta gymnázia, nebo na studenta maximálně prvního ročníku vysoké nematematické školy. Přestože v článku nejsou faktické chyby, přínos tohoto článku pro čtenáře neznalého problematiky je velmi nízký.

První odkaz, který se nám zobrazí nejvýše, je odkaz na stránky www.aristoteles.cz [20]. Veřejně přístupné stránky jsou velmi jednoduché jak co do obsahu, tak graficky. O inverzní funkci se zde dozvíme jen několik neúplných základních informací[8].

Grafická stránka tohoto článku je velmi jednoduchá, strohá. Autor do běžného textu vkládá vzorce jako obrázky a ty pak levitují nad úrovní textu. Dále jsou tyto vzorce mírně neostré a tím jsou hůře čitelné exponenty a některá znaménka.

Dále následuje tabulka s přehledem osmi funkcí a k nim autor webu uvádí funkce inverzní. V této tabulce najdeme exponenciální a přirozenou exponenciální funkci, čtyři goniometrické funkce, lineární funkci a mocninnou funkci ve třetí mocnině. V této fázi prohlížení článku je vidět, jak moc si svou práci autor zjednodušil. Věřím, že téměř každý student po přečtení tohoto článku si bude myslet, jak snadné je pochopení inverzní funkce. Dále se na této stránce nachází věta[9] jako nástroj řešení exponenciálních a goniomet-

[8]Inverzní funkce f^{-1} k funkci f se vyznačuje tím, že:
$D(f^{-1}) = H(f)$
$H(f^{-1}) = D(f)$

- kde $D(f)$ a $D(f^{-1})$ je definiční obor funkce f a f^{-1} (x-ová osa)
- kde $H(f)$ a $H(f^{-1})$ je obor hodnot funkce f a f^{-1} (y-ová osa) [20]

[9] Věta o vztahu inverzní funkce f^{-1} a původní funkce f vzhledem k argumentu (x) původní funkce [20]

$$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x \quad pro \quad každé \quad x\in D\left(f\right)$$

rických rovnic. Pod větou se nachází několik výrazů a u některých chybí existenční podmínky. Ke konci stránky jsem našel tři jakoby nedůležité věci pod heslem[10]. Následuje jednoduchý obrázek a na úplný závěr popis inverzních funkcí na kalkulačce.

V tuto chvíli stručně shrnu, co mi vyhledávač centrum.cz vyhledal poté, co jsem zadal heslo „inverzní funkce“. Každému uživateli internetu se objeví na monitoru počítače nejprve odkaz na stránky, ve kterých autor jednu z hlavních podmínek existence inverzní funkce uvádí jen tak mimochodem a navíc s pravopisnou chybou. Tyto stránky ještě obsahují placenou sekci. Předplacení této služby jsem považoval za bezpředmětné. Další odkazy vedou k výše popsaným článkům a nebo ke článkům, které s vysvětlením pojmu inverzní funkce nemají mnoho společného.

Při zkoumání situace na serveru www.seznam.cz je situace obdobná. Na prvním místě z přes 12 tisíc odkazů se objeví odkaz na aristoteles.cz. Při zadání hesla „inverzní funkce“ je odkazů 666 a mezi nimi je jen několik málo odkazů, které vyhledávač na centru nenašel. Mezi nimi je například odkaz na stránky, kde autor vysvětluje, jak zadávat inverzní funkci v systému Maple, který s tímto tématem částečně souvisí. A nebo článek o funkci inverzní přehazovačky sihmano, který nám o inverzní funkci neřekne vůbec nic.

Při zadání hesla „inverzní funkce“ do vyhledávače google.cz se situace více méně opakuje. Mezi 28 300 odkazy se na prvním místě objeví opět odkaz na aristoteles.cz a wikipedie.cz; zadáním uvozovek snížíme počet vyhleda-

---

[10] Co je také dobré vědět:

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$$

Inverzní funkci můžeme získat pouze s funkce prosté. Funkce prostá je funkce, která je buď pouze klesající nebo pouze rostoucí

Funkce f je vždy souměrná s f^{-1} v osové souměrnosti podle osy $y = x$. [20]

ných odkazů na 3 300.

Pomocí gogole.cz jsem našel článek[11], který se na internetu vyskytuje hned na dvou místech, a to na encyklopedie.seznam.cz a na cojeco.cz. Kdybychom nahradili v článku slovo „jednojednoznačné“ slovem „prosté“ a slova „podmnožina“ matematickou značkou podmnožiny, dostali bychom korektní definici inverzní funkce. Článek není doplněn obrázkem, ani příkladem. Je škoda, že placené nekvalitní odkazy dostávají přednost před odkazy hodnotnějšími. Bohužel i internet se stává stále komerčnějším.

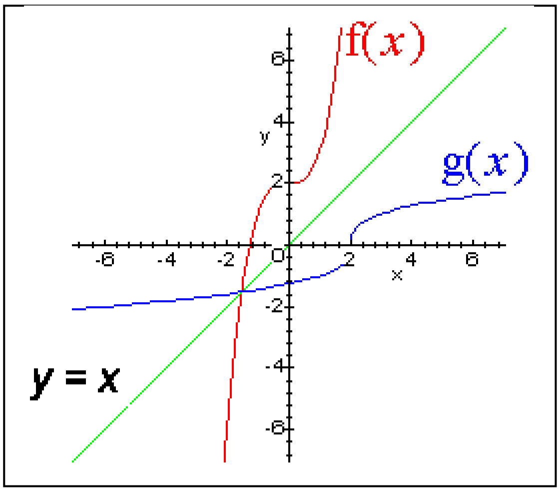
Nyní se krátce podíváme na situaci mezinárodních vyhledávačů. Vyhledávač www.gogole.com našel okolo 2 640 000 odkazů po zadání hesla „inverse function“. Hned první odkaz směřuje na stránky encyklopedie [23] wikipedia.org. Po otevření stránky v encyklopedii se nám ukáže velmi pěkně zpracovaný článek o inverzní funkci. Článek má rozsah asi 10 stránek; začíná jednoduchým příkladem, následují oddíly definice, vlastnosti, inverzní funkce při výpočtech, dílčí inverzní funkce pro funkci neprostou, zajímavé odkazy a reference. Všechno je doplněno příklady, obrázky a grafy.Většina dalších odkazů vede na stránky s matematickou tématikou a ve většině příkladů jsem se shledal s výrazně větším doplněním obrázky a grafy než na stránkách českých. Jeden z mnoha grafů inverzní funkce uvádím na obr. 1 [24].

Zadáním uvozovek okolo hesla „inverse function“ se počet odkazů redukuje na 320 000.

Altavista.com je vyhledávač, který vyhledal na 660 000 odkazů na heslo „inverse function“, bez uvozovek to bylo 20 400 000.

---

[11] inverzní funkce
Funkce, která je k nějaké jednojednoznačné funkci f zobrazující množinu **A** podmnožina **R** na množinu **B** podmnožina **R** přiřazena takto: ke každému *y* z **B** přiřadíme takové *x* z A, že $f(x)=y$; značíme $f^{-1}(y)$ a říkáme, že f^{-1} je inverzní funkce k funkci *f*. Platí $f^{-1}(f(x)) = x$ pro každé *x* z **A** a $f(f^{-1}(y)) = y$ pro každé *y* z **B**. Grafy navzájem inverzních funkcí jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu [21],[22]



Obr. 1

Vyhledávač yahoo.com vyhledal 666 000 odkazů, bez uvozovek to bylo 20 300 000. Mezi všemi těmito odkazy se určitě nacházejí odkazy plnohodnotné a zajisté i odkazy zbytečné, nesprávné, nebo dokonce chybové.

Situace okolo inverzní funkce se mi zdá být celkem nevyvážená, pokud někdo chce najít informaci o inverzní funkci na internetu na stránkách psaných v českém jazyce. Přestože odkazů jsou stovky, narazit na článek matematicky korektní je velmi těžké. Pokud budeme hledat v mezinárodních příspěvcích, je situace výrazně příznivější.

Kapitola 3

Inverzní funkce na školách

Podle toho, co jsem popsal v kapitole 1 o středoškolských učebnicích, se inverzní funkci, pokud je vůbec zařazena do učebnice a do učebních plánů školy, věnuje velmi málo času.

Na většině gymnázií a na středních školách, s jejichž studenty jsem se setkal, se inverzní funkce zavádí pomocí definice nebo se ukazuje na jednom řešeném příkladu. Následně se pak studentům ukáží její vlastnosti, a to vše, pokud mají studenti štěstí, v maximálně dvou hodinách. Jen několik úloh v gymnaziální učebnici plně neumožní studentům pořádně do problematiky proniknout.

Na škole, kde jsem mohl níže popsaný experiment provádět, se v učebnicích inverzní funkce nevyskytuje, ale v učebních plánech pro matematiku je. Nemohu posoudit, jak pedagog působící na této škole před mým příchodem inverzní funkci studentům vysvětloval. Mohl jsem jen posoudit znalosti studentů při opakování. Ve většině kapitol byly znalosti studentů standardní, ale v oblasti logaritmů a logaritmických rovnic byly podprůměrné.

Kapitola 4

Nástroj k sestrojení inverzní funkce

Pokusím se ukázat, jak vytvořit funkci inverzní, sestrojit její graf a později pak přijít na analytické zadání. Aby inverzní funkce byla funkcí, musí být zadaná funkce funkcí prostou. Ukážeme si příklady na elementárních funkcích. Nejprve vytvoříme tabulku funkčních hodnot, poté graf funkce a následně tabulku hodnot inverzní funkce a to vše budeme provádět pomocí běžně dostupného kancelářského počítačového vybavení MS EXCEL.

Je jisté, že v dnešní době se dá sehnat zdarma na internetu mnoho matematických programů, které jsou schopny kreslit grafy zadaných funkcí a k nim pak grafy funkcí inverzních. Program MS EXCEL patří k naprosto základnímu vybavení každého počítače a pracovat s tímto programem se v dnešní době vyučuje už na základních školách. Osvojíme si i některé další vlastnosti tohoto programu, také si procvičíme některé potřebné dovednosti při práci s funkcemi a zopakujeme si některé vlastnosti funkcí. Dále bude následovat několik řešených příkladů s komentářem jak k sestrojování grafů funkcí, tak k ovládání programu MS EXCEL.

Kapitola 5

Lineární funkce

5. 1. Úvod do problematiky inverzní funkce

Pomocí několika příkladů jsem učební látku týkající se inverzních funkcí odučil ve školním roce 2006/2007 na Soukromé obchodní akademii Stodůlky se souhlasem ředitelky školy. Po projednání s předsedou předmětové komise jsem vypracoval pro studenty pracovní listy, které studenti následně v hodinách matematiky vyplňovali. V další fázi výukového bloku jsme se studenty v učebně informačních a výpočetních technologií pomocí počítačového vybavení školy v počítačovém programu MS EXCEL zkoušeli sestrojovat grafy funkcí a grafy inverzních funkcí. Závěrem jsme celou látku se studenty shrnuli a v krátké diskuzi si ujasnili přesné matematické pojmy. A já si uvědomil, že pomocí tohoto přístupu lze velmi snadno a nenásilnou formou zopakovat učivo o funkcích a vysvětlit pojem inverzní funkce.

Před samotnou prací nad řešením prvního příkladu jsem se studenty zopakoval pojmy: funkce, vlastnosti funkce, rostoucí a klesající funkce, monotónní funkce, prostá funkce, sudá a lichá funkce, maximum a minimum funkce. Dále jsme zopakovali na konkrétních případech hlavní skupiny elementárních funkcí: lineární funkce, kvadratické funkce, racionální lomené funkce, mocninné funkce, goniometrické funkce a exponenciální funkce.

5. 2. Lineární funkce

Nyní přejdu k samostatné práci studentů. Zadání první části úlohy bylo velmi jednoduché:

„Je dána funkce $y = 3x + 2$. Doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.“

K této úloze jsem pro studenty připravil pracovní list (viz příloha č. 1). Celý první příklad studenti řešili v běžné třídě pomocí svých znalostí a mohli používat kalkulátory. Práce šla studentům celkem snadno a s vyplněním připravené tabulky neměli žádné problémy. Tato část příkladu by spíše patřila do sedmého ročníku základní školy, ale my tento graf potřebujeme právě pro vlastnost inverzní funkce a pro celý konstruktivní přístup k tomuto tématu.

V další části tohoto příkladu studenti dostali za úkol určit hodnoty prvního řádku tabulky téže funkce. Druhý řádek měli zadaný takto:

x											
$3x+2$	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5

Zhruba třetina studentů vyplnila tabulku pouze celočíselnými hodnotami. To znamená pouze čtyři políčka z jedenácti. Na dotaz, proč nepokračují, většina studentů odpovídala argumentem: „Stejně se jedná o lineární funkci a k sestrojení grafu mi takto vyplněná tabulka stačí.“ Tato argumentace je matematicky zcela v pořádku. Při práci s počítačem však tito žáci poznali nutnost mít tabulku vyplněnou úplně. Někteří studenti však přiznali, že nevědí, jak hodnoty prvního řádku dopočítat.

Většina studentů první řádek tabulky doplnila zcela správně. Pracovali celkem rychle a ve většině případů počítali zpaměti. Nakonec graf funkce sestrojili všichni správně. Zaměnit řádky tabulky a sestrojit grafický průběh nebyl pro nikoho problém.

Funkční předpis nové funkce studenti určovali až v závěru celého příkladu. V této fázi již měli před sebou sestrojený správný graf, a tak určit funkční předpis bylo jen opakování, přesto asi třetina studentů neurčila nic a několik jedinců funkční předpis určilo nepřesně.

Na otázku, jaký je vztah mezi zadanou a nově vzniklou funkcí, odpovídali studenti ojediněle. A asi v pěti případech se objevil výborný postřeh, že obě funkce jsou rostoucí.

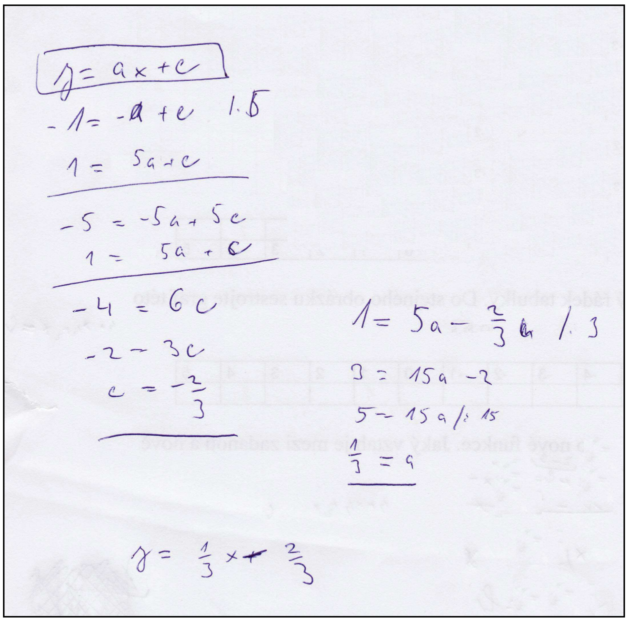
Některé konkrétní práce studentů si nyní rozebereme podrobněji. Mezi nejméně povedené práce patří ta, kterou najdeme na obr. 3. Student všechny části úkolu týkající se výpočtů a doplňování tabulek splnil zcela správně, avšak při zakreslování vypočtených bodů do grafu se dopustil několika chyb. V případě zadané lineární funkce u dvou bodů zaměnil *x*-ovou a *y*-ovou souřadnici, čímž se graf deformuje. Je zajímavé, že student, přestože se jedná o lineární funkci, proložil spojnici bodů plynule ve tvaru oblouku.

U funkce druhé (inverzní) zaměnil souřadnice nejméně u čtyř bodů. Dále u jedné souřadnice zapomněl na záporné znaménko při zobrazování grafu a vůbec se nezabýval tím, že jeden bod je mimo. Přesto určil funkční předpis nové funkce správně; jestli se k funkčnímu předpisu dostal výpočtem, nebo ho někde opsal, nemohu posoudit, protože jsem žádné pomocné výpočty od tohoto studenta neměl k dispozici. Z grafu funkce se ale k funkčnímu předpisu nemohl dostat, protože graf není grafem lineární funkce. Přesto tento student tušil nějakou vzájemnou závislost obou funkcí, protože na otázku, jaký je vztah mezi zadanou a nově vzniklou funkcí, odpověděl: „Druhá je k ní opačná.“ Z této odpovědi je jasné, že student předpokládá, že nově vzniklá funkce závisí na funkci zadané.

Na obr. 4 najdeme jedno z nejlepších studentských řešení. Student vyplnil řádně všechna políčka tabulky a správně dopočítal funkční předpis pro inverzní funkci. Postup, pomocí kterého student vypočítal hodnoty koeficientů inverzní funkce, je na obr. 2. Z častého škrtání a přepisování ve výpočtu
je vidět nepozornost studenta a zanedbávání detailů. Ta můžeme pozorovat i na grafu obou funkcí, kde student body inverzní funkce zobrazuje puntíky dost velkýmy aby se dotýkaly požadované přímky. Za zmínku stojí i

studentův názor: „Jsou pootočeny o několik stupňů.“ Řešením dalších úloh tento student sám přišel na vztah funkce a inverzní funkce.

Dále zde uvádím práci nejstrožší (obr. 5). Autor této práce se v problematice funkcí pohybuje s geometrickým nadhledem a na papír napíše jen to, co je nejnutnější. Graf zadané funkce sestrojil pomocí průsečíků se souřednicovými osami, na což ukazují body na přímce a kraťoučký výpočet vpravo vedle tabulky. V následující tabulce vyplnil tři políčka. Nedokáži ani odhadnout, zda třetí hodnotu dopočítal pro jistotu, a nebo ji do tabulky zapsal na základě nakreslených grafů obou funkcí jako hodnotu průsečíku. Funkční předpis zřejmě zapsal na základě nakresleného grafu. Velmi krátká odpověď na poslední otázku „převrácená“ je celkem nevypovídající, neboť nevíme, proč a nebo podle čeho je funkce převrácená. Nelze určit, zda student už v této chvíli věděl nebo tušil a nebo zda jeho úvaha byla špatná.

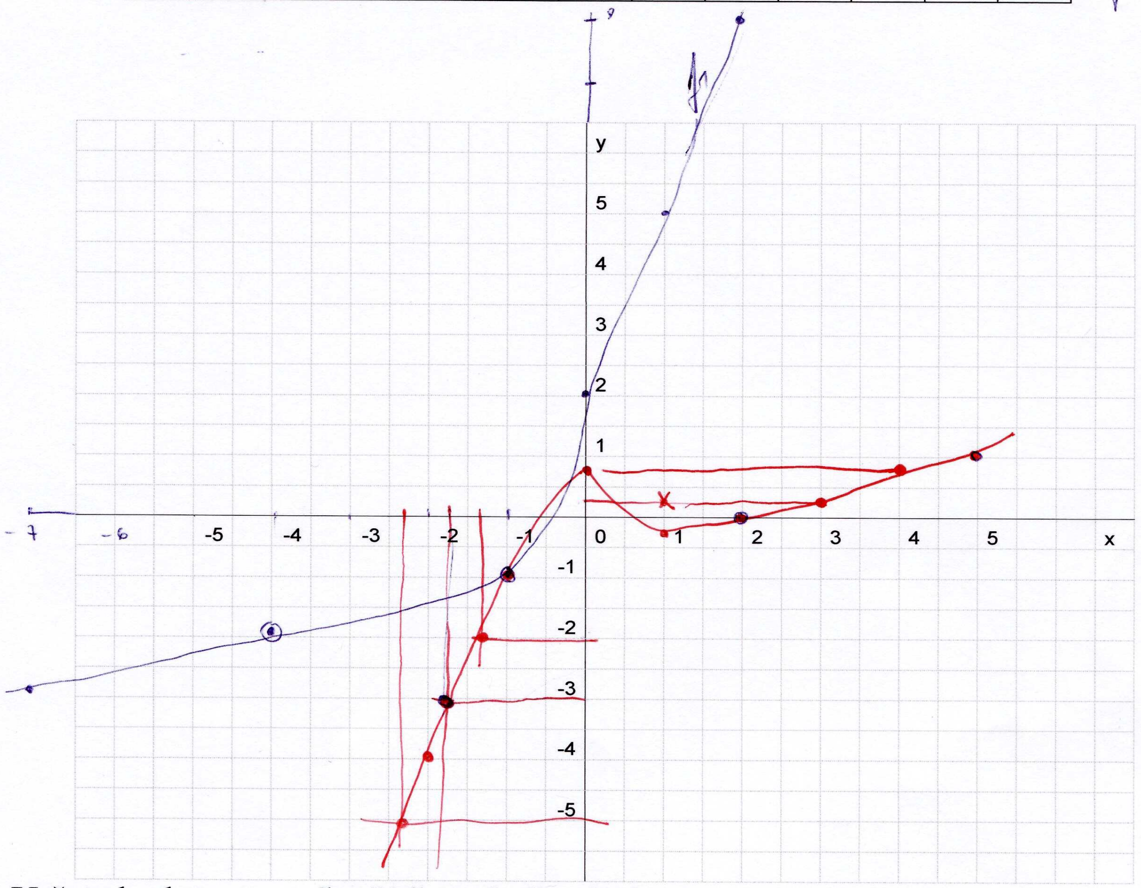


Obr. 2

Je dána funkce $y = 3x + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = 3x+2	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17

f1



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
y = 3x+2	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

f2

Určete funkční předpis této nové funkce.

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

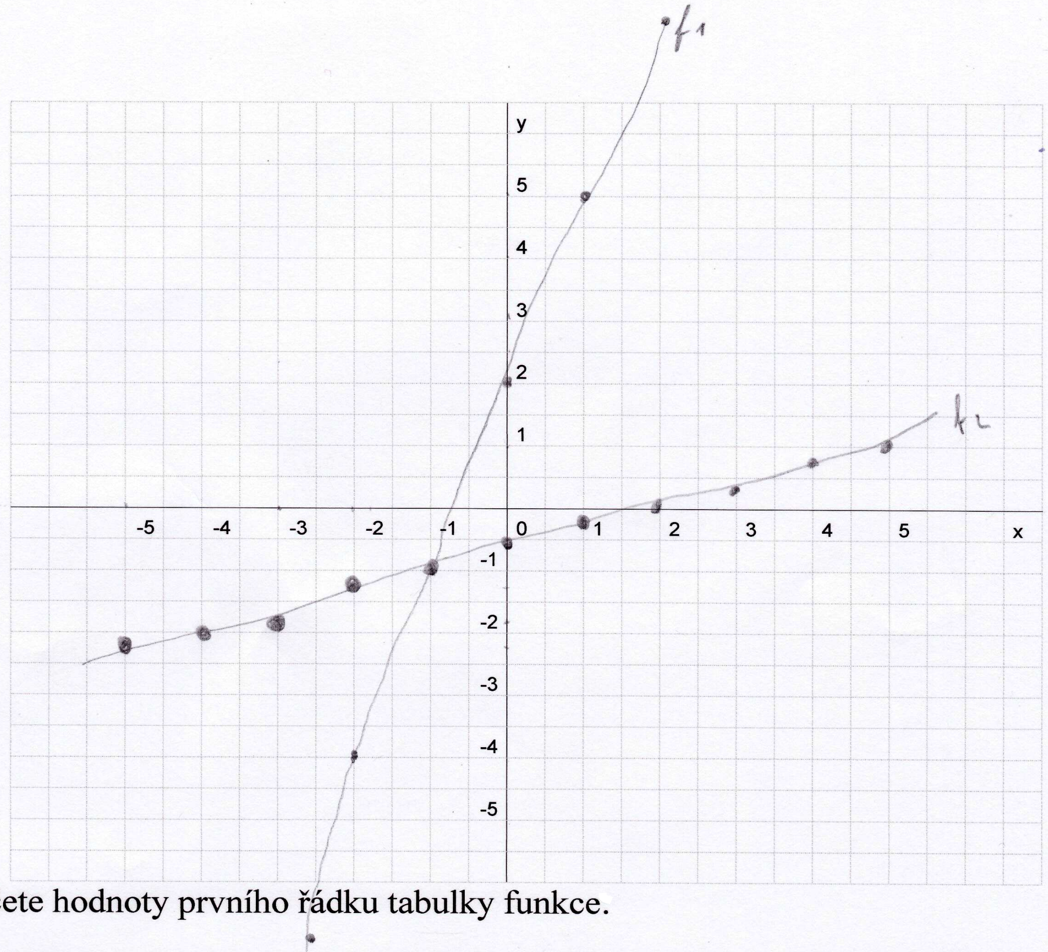
druhá je k ní opačná

Obr. 3

Je dána funkce $y = 3x + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = 3x+2	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	17

f_1



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
y = 3x+2	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$-\frac{7}{3}$	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

f_2

Určete funkční předpis této nové funkce.

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

jsou pootočeny o několik stupňů

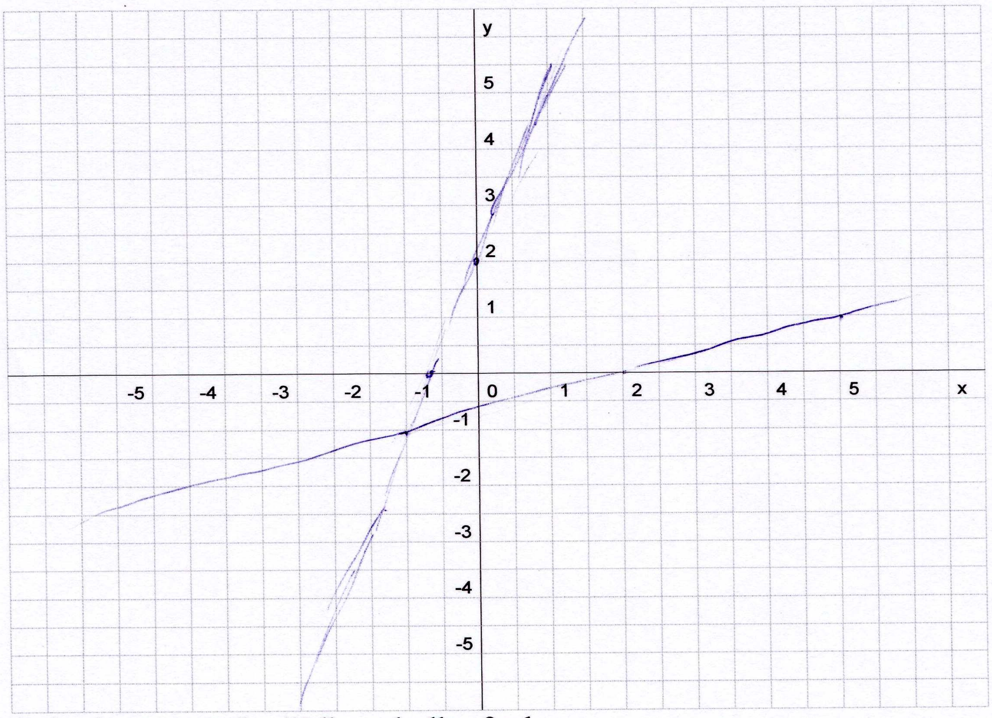
Obr. 4

Je dána funkce $y = 3x + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = 3x+2						2					

$0 = 3x + 2$

$-\frac{2}{3} = x$



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x					-1			0			1
y = 3x+2	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y					-1			0			1

Určete funkční předpis této nové funkce.

$y = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

PŘEVRÁCENÁ

Obr. 5

Kapitola 6

Kvadratická funkce

6. 1. Kvadratická funkce $y = x^2$

V další části vyučovací hodiny jsem předložil studentům pracovní list, viz příloha č. 2. Zde studenti pracovali ve dvou až čtyřčlenných skupinách stejným způsobem na nejjednodušší kvadratické funkci $y = x^2$. Vyplnění první tabulky a sestrojení grafu bylo opět opakování, a tak nám to nezabralo mnoho času. Při vyplňování prvního řádku druhé tabulky se většina studentů shodla na tom, že se jedná o odmocninu z druhého řádku. Nikoho nenapadlo, že by mohl do prvního řádku tabulky zadávat čísla záporná.

Zaměnit řádky tabulky a sestrojit graf byla v tuto chvíli jen rutina. Určit funkční předpis nebylo těžké, neb téměř všichni studenti věděli, že se jedná o odmocninu z x. V odpovědi na otázku vztahu mezi funkcí zadanou a nově vzniklou se několikrát objevila slova „opačná operace".

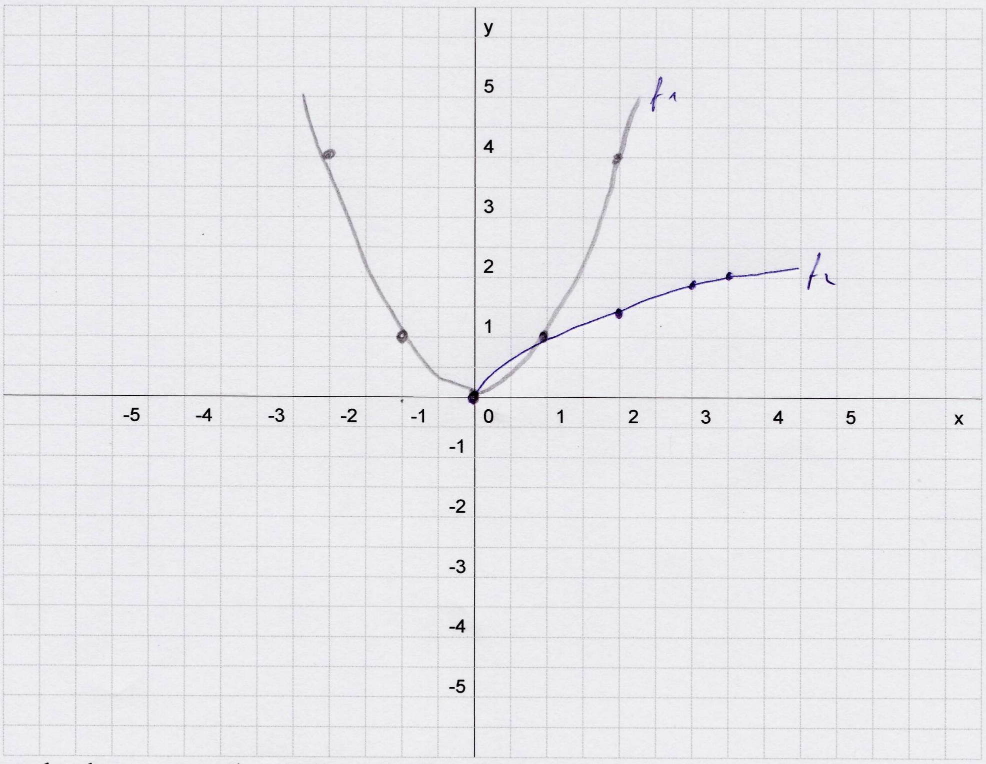
Ukázka studentské práce s několika chybami je na obr. 6. Přestože student zcela správně doplnil všechny tabulky a v grafu se při zobrazování jednoho bodu spletl jen o půl centimetru, tak při určení funkčního předpisu uvedl předpis pro lineární funkci z předchozího případu. Déle tento student uvedl: „Funkce je převrácená v D_f – $\mathbf{R}^+$." Z toho plyne jasná studentova představa o nelinearitě nově vzniklé funkce.

Velmi pěkná práce je na obr. 7, v které student zobrazuje grafy ke všem třem tabulkám. Už u tohoto příkladu začínají studenti tušit o osové souměrnosti obou grafů, což je vidět z vyjádření: „Funkce f_3 je otočená na druhou stranu, než je f_1 v 1. kvadrantu." Student zcela správně určil funkční předpis.

Je dána funkce $y = x^2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

f_1



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x						0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$
$y = x^2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y						0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$

f_2

Určete funkční předpis této nové funkce. Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí

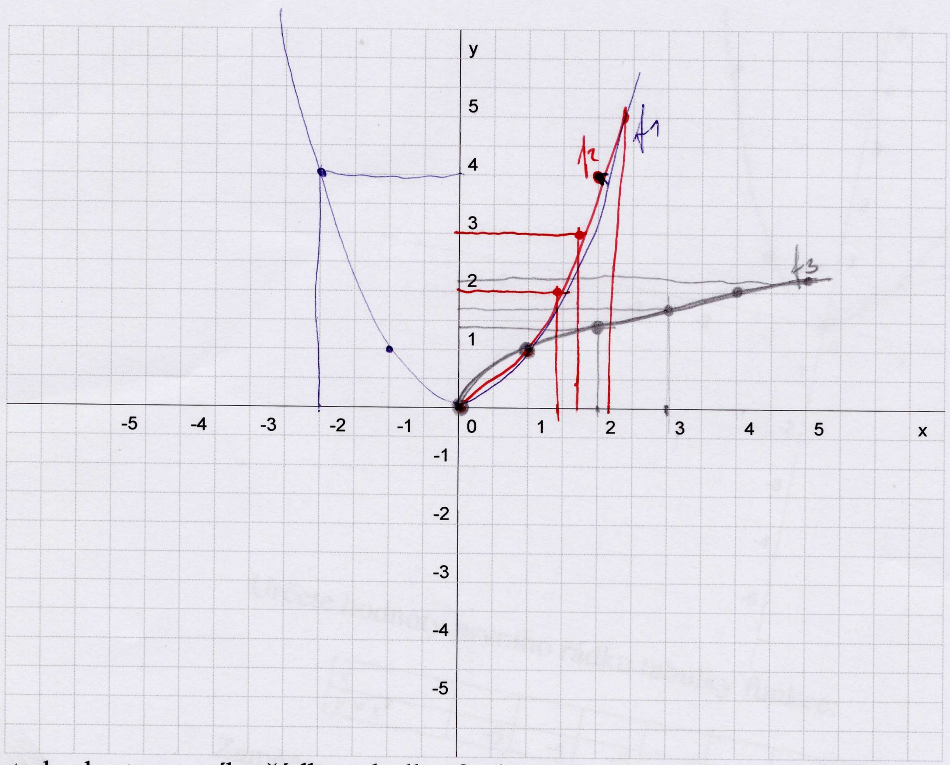
$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

f_2 je převrácená funkce v $D_f - R^+$

Obr. 6

Je dána funkce $y = x^2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	f_1



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x	X	X	X	X	X	0	$\sqrt{1}$ (1)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$ (2)	$\sqrt{5}$	
$y = x^2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	f_2

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
y	X	X	X	X	X	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	f_3

Určete funkční předpis této nové funkce. Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí

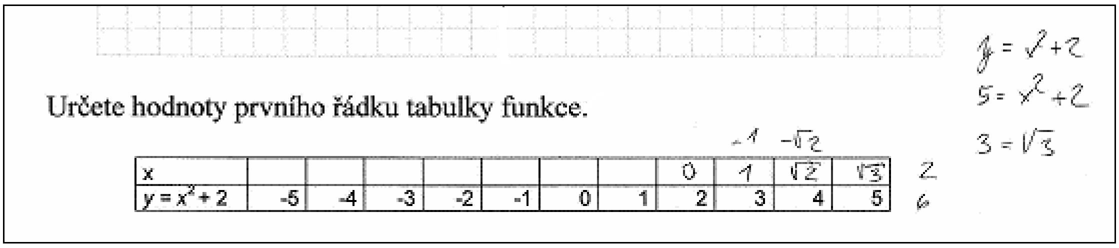
funkce f_3 je otočená na druhou stranu, než je f_1 v 1. kvadrantu

$y = \sqrt{x}$

Obr. 7

6. 2. Kvadratická funkce $y = x^2 + 2$

Následoval pracovní list s funkcí $y = x^2 + 2$ (příloha č. 3). Tento příklad byl zlomový, neboť při jeho řešení začali někteří studenti přicházet na zákonitosti funkčního předpisu inverzní funkce. Vyplnit tabulku a sestrojit graf šlo opravdu rychle. K vyplňování prvního řádku druhé tabulky zde na obr. 8 uvádím část jednoho řešení.


Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

$y = \sqrt{\ } + 2$

$5 = x^2 + 2$

$3 = \sqrt{3}$

x								0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$y = x^2 + 2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Obr. 8

Na tomto řešení je výborně vidět, jak student postupoval. Nejprve vyplnil celočíselné hodnoty asi zpaměti. Zřejmě si uvědomil, že dvě a dvě jsou čtyři, a tak doplnil nad čtyřku odmocninu ze dvou. Při výpočtu posledního prázdného okénka použil rovnici, ve které vyřešil hodnotu inverzní funkce pro $y = 5$. Tato jednoduchá rovnice, přestože její poslední řádek není formálně správný a rovnost zde neplatí, je okamžikem, kdy student sám přišel na matematický princip inverzní funkce. K zobecnění tohoto postupu je už jen malý krůček. Stejným nebo podobným způsobem postupovala asi pětina studentů. U tohoto příkladu asi čtvrtina studentů vyplnila do tabulky vedle kladných hodnot i hodnoty záporné.

Vyplnění poslední tabulky na pracovním listě a sestrojení grafu bylo poměrně rychle hotové. Přestože některé výtvory jsou z hlediska matematiky nepřesné či ne zcela správné, vedly ke správným domněnkám. Konkrétně někteří studenti nezobrazili jednu inverzní funkci k funkci $y = x^2 + 2$, ale obě funkce vzájemně inverzní v jednom obrázku. Právě tito studenti odhalili jako první osovou souměrnost mezi funkcí a inverzní funkcí. Přesto si nejsem jist zda si uvědomili, že se jedná právě o dvě inverzní funkce.

Funkční předpis pro vzniklou funkci většina studentů odhadovala z grafu, a někteří i správně, ale nikdo neuvedl funkční předpis pro klesající inverzní funkci, i když ji někteří studenti sestrojili.

U tohoto příkladu na otázku, jaký je vztah mezi funkcí zadanou a nově vzniklou, byly tyto odpovědi: „Funkce je překlopená, funkce je otočená, souměrná, osově souměrná podle $y = x$, opačná funkce, obrácená funkce, funkce je přesunuta z osy x na osu y a otočena o 90°, to, co je ve 2. kvadrantu na ose y, je v 1. kvadrantu na ose x."

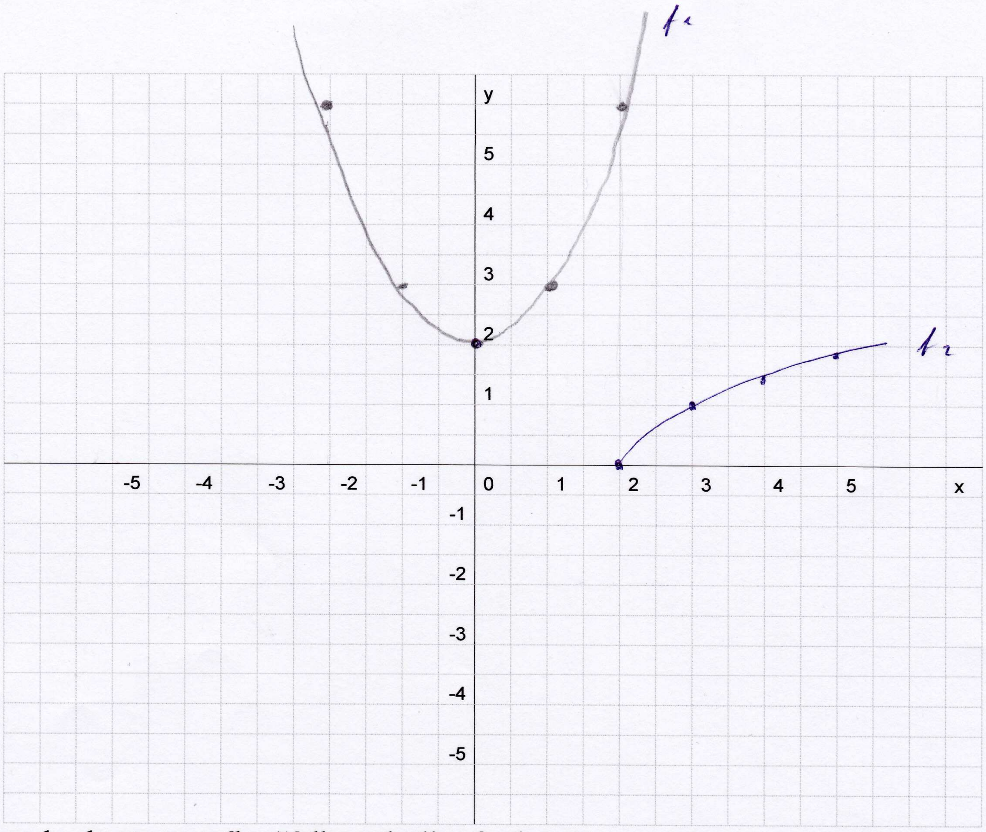
Následně uvedu tři řešení, která jsem ze všech vybral. V prvním řešení na obr. 9 jsou hodnoty v tabulkách správné, graf je sestrojen také dobře. Student tuší, že inverzní funkce souvisí s odmocninou z x, ale správně vyjádřit funkční předpis nedovede. Vztah mez inverzní funkcí a funkcí zadanou milně považuje za otočení.

Ve druhém řešeni na obr. 10 je vše včetně funkčního předpisu inverzní funkce správně, student u druhých tabulek pracoval jen s kladnými hodnotami, dokonce políčka v tabulkách, kde funkce není definována, proškrtal. Ze vztahu mezi funkcemi „to, co je ve 2. kvadrantu na ose y, je v 1. kvadrantu na ose x" je zřejmé, že tento student zatím považuje otočení za vztah mezi funkcemi.

Jako třetí uvádím práci studenta, obr. 11, který ve svém pracovním listu zobrazil inverzní funkci ke klesající i rostoucí části zadané funkce. Hodnoty klesající inverzní funkce má pod tabulkou, tak lze předpokládat, že tušil o existenci dvou různých funkcí. Protože neurčil funkční předpis ani jedné z funkcí, nemůžeme posoudit správnost předchozího předpokladu. O osové souměrnosti podle $y = x$ je již přesvědčen.

Je dána funkce $y = x^2 + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 + 2$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x								0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$y = x^2 + 2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y								0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Určete funkční předpis této nové funkce.

$y = \sqrt{x}$.

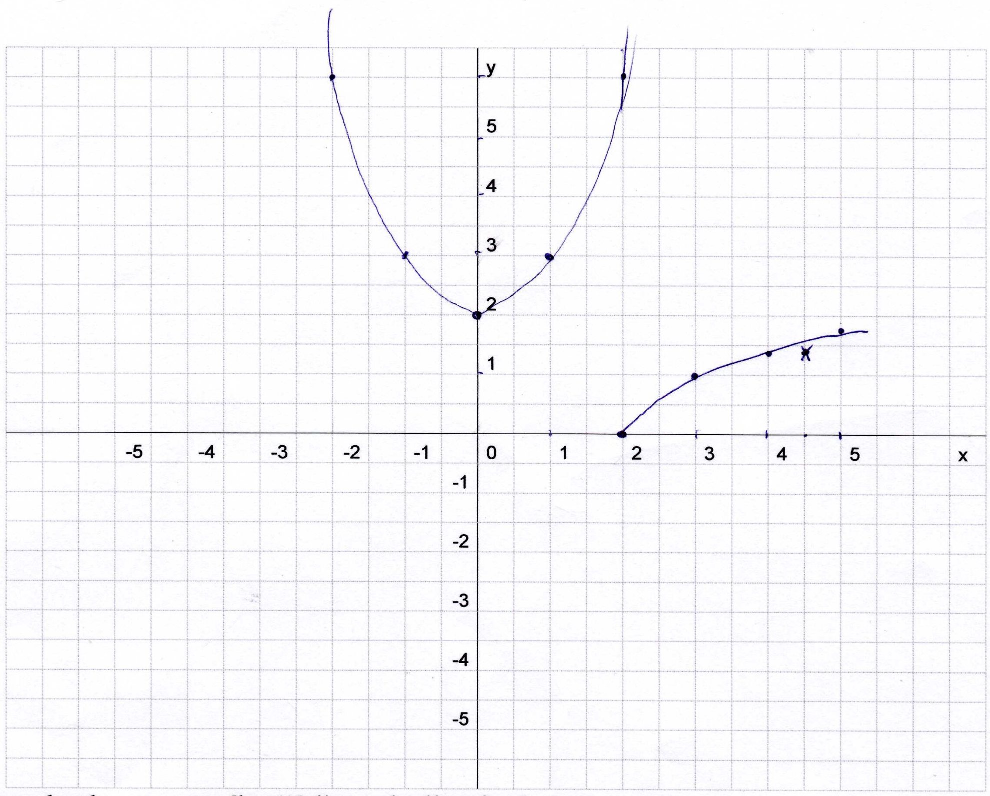
Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

f2 je přesunuta z osy y na osu x a otočena o 90°

Obr. 9

Je dána funkce $y = x^2 + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 + 2$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x	x	x	x	x	x	x	x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$y = x^2 + 2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	x	x	x	x	x	x	x	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Určete funkční předpis této nové funkce.

$y = \sqrt{x-2}$

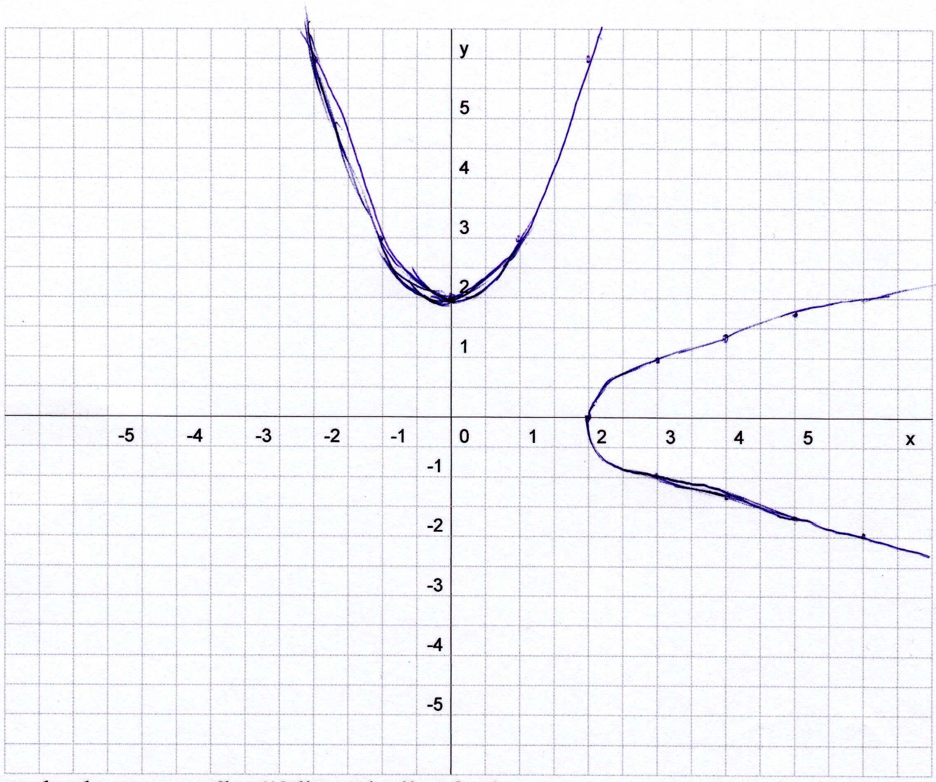
Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

~~to co je~~ ve 2. kvadrantu na ose y i je v 1. kvadrantu na ose x

Obr. 10

Je dána funkce $y = x^2 + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 + 2$	27	18	11	6	3	2	3	6	11	18	27



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

$y = x^2 + 2$

$\sqrt{\ } = x^2 + 3$

$3 = \sqrt{3}$

-1 $-\sqrt{2}$

x								0	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
$y = x^2 + 2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
y								0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

Určete funkční předpis této nové funkce. -1 $\sqrt{1}$ $-\sqrt{2}$ $-\sqrt{3}$ -2

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

OSOVĚ SOUMĚRNÉ POLE $y = x$

Obr. 11

6. 3. Kvadratická funkce $y = (x + 2)^2$

V této fázi bylo nutné studentům ujasnit některé informace o probíraném tématu. Výsledky této diskuse jsem shrnul do několika bodů takto:

– nově vzniklá funkce je opravdu funkce

– mezi zadanou a tímto způsobem vytvořenou funkcí je matematický vztah

– graf nově vzniklé funkce je osově souměrný s grafem funkce zadané

– zadaná i nově vzniklá funkce jsou buď obě rostoucí, nebo obě klesající

– zadaná funkce musí být prostá, nebo budeme pracovat pouze s libovolnou částí, kde je funkce prostá

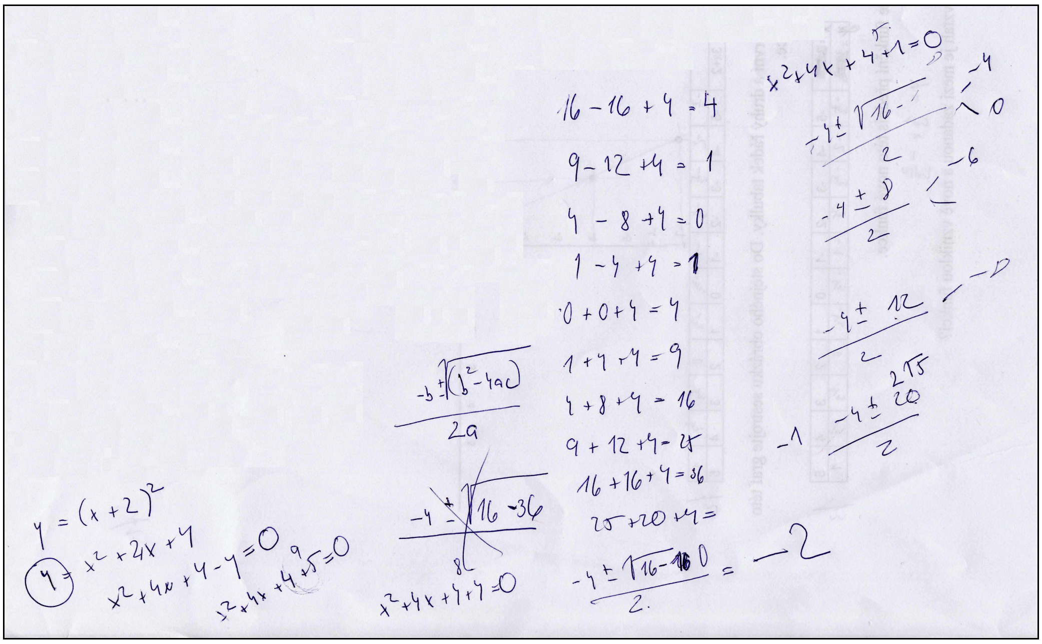
– u některých funkcí se funkční předpis nové funkce dá vypočítat z funkčního předpisu zadané funkce

Stále jsem studentům neprozradil, jak se určí funkční předpis inverzní funkce z funkčního předpisu funkce zadané. Dále jsem jim neprozradil, že se jedná o funkci inverzní. Za domácí úkol dostali pracovní list (příloha č. 4), na kterém byla funkce $y = (x + 2)^2$.

Závěrem této první hodiny jsem studentům slíbil, že příští hodinu matematiky půjdeme do počítačové pracovny, ve které budeme tabulky vyplňovat a grafy kreslit na PC. Ve zbývajících třech minutách jsem jim dovolil diskutovat nad problémem a nebo začít pracovat na zadaném domácím úkolu.

Z těchto studentských prací zde uvedu práce dvě, jednu z nejlépe vypracovaných a jednu s drobnou chybou. Na obr. 13 nalezneme práci, na které je zajímavé, že student do druhé a třetí tabulky vyplňoval jen hodnoty klesající inverzní funkce, ale graficky zobrazil i funkci rostoucí. Stejně tak i funkční předpis odpovídá pouze hodnotám v tabulce. Přesto na druhé straně pracovního listu byly vypočítány hodnoty zadané funkce a hodnoty inverzní funkce k oběma prostým částem zadané funkce; ukázka výpočtů je na obr. 12. Zde je vidět, jak student dopočítával funkční hodnoty zadané funkce poctivě a precizně, avšak zdatnější student by měl odhadnout hodnoty bez tolika výpočtů na základě znalostí kvadratických funkcí. V posledním řádku a druhém sloupci jsou vidět výpočty několika hodnot inverzní funkce, respektive dvou různých hodnot k některým hodnotám *x*, a pokusy o výpočty hodnot ostatních. Právě to vedlo studenta k vyjádření funkčního předpisu inverzní funkce.

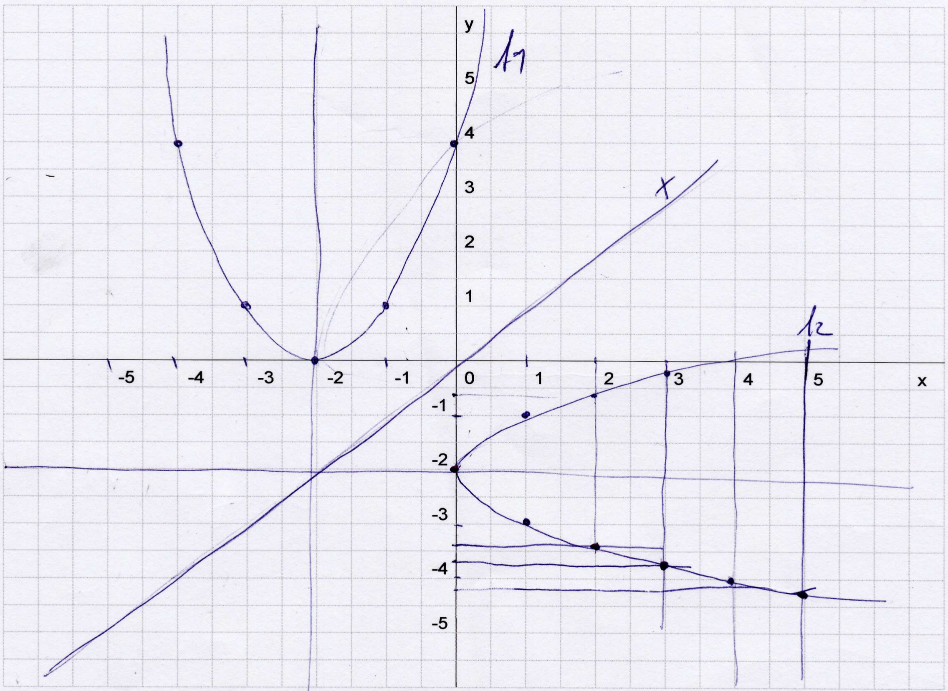
Naproti tomu jedna malá chyba v práci na obr. 14 v tabulce inverzní funkce u hodnoty *x* = 5, kde student, zřejmě při přepisování hodnot spočítaných na pomocném papíru, zaměnil pětku za trojku. Všechny ostatní hodnoty má tento student zcela v pořádku. Přestože studenti v tomto okamžiku věděli o souměrnosti funkce a inverzní funkce, tak tento student sestrojil graf s chybou, která ho vedla i k mylnému závěru, že „f_2 je převrácená do VI. kvadrantu a více otevřená“. Tento student zakreslenými body proložil křivku a doplnil ji na parabolu. Předpokládám, že tušil, že není něco v pořádku, proto nevyplnil funkční předpis a jen situaci popsal.



Obr. 12

Je dána funkce $y = (x + 2)^2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x + 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x	×	×	×	×	×	-2	-3	$-2-\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{3}$	-4	$-2-\sqrt{5}$
$y = (x + 2)^2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	×	×	×	×	×	-2	-3	$-2-\sqrt{2}$	$-2-\sqrt{3}$	-4	$-2-\sqrt{5}$

Určete funkční předpis této nové funkce.

$y = -2 - \sqrt{x}$

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

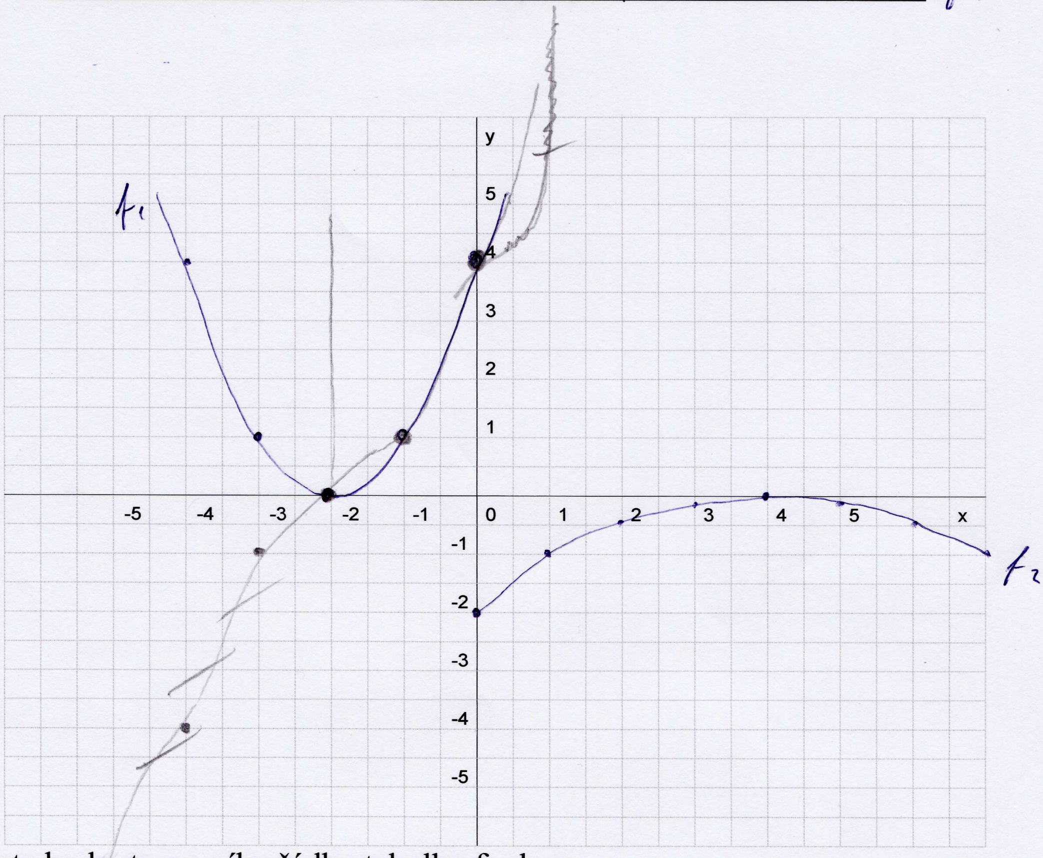
Je opačná.
Jsou osově souměrné podle osy x.

Obr. 2

Je dána funkce $y = (x+2)^2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x+2)^2$	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

f_1



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x						-2	-1	$-2+\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{3}$	0	$-2+\sqrt{3}$
$y = (x+2)^2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y						-2	-1	$-2+\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{5}$	0	$-2+\sqrt{3}$

f_2

Určete funkční předpis této nové funkce.

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

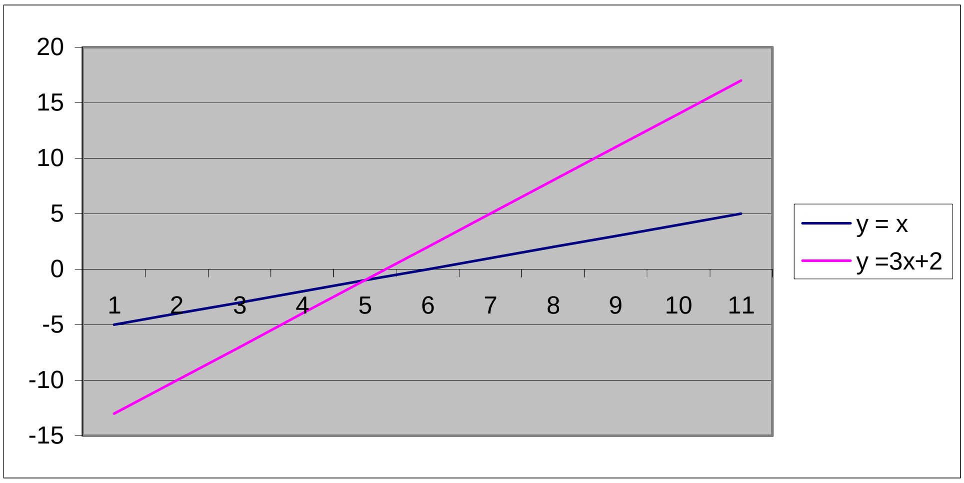
f_2 je převrácená do IV. kvadrantu a ~~[illegible]~~ více otočená

Obr. 14

Kapitola 7

Lineární funkce v Excelu

Studenti již s Excelem měli více čí méně zkušeností. Věděli že „nejprve vytvoříme tabulku, pak ji označíme a klikneme na ikonu grafu a je to“. Takhle jednoduché to opravdu není, proto se většina studentů při řešení prvního příkladu dostala ke grafu na obr. 15. Samozřejmě tento obrázek má s grafem funkce pramálo společného. A tak jsem začal studenty učit, jak nastavit potřebné parametry v programu, aby graf vypadal, jak jsou studenti zvyklí z literatury.

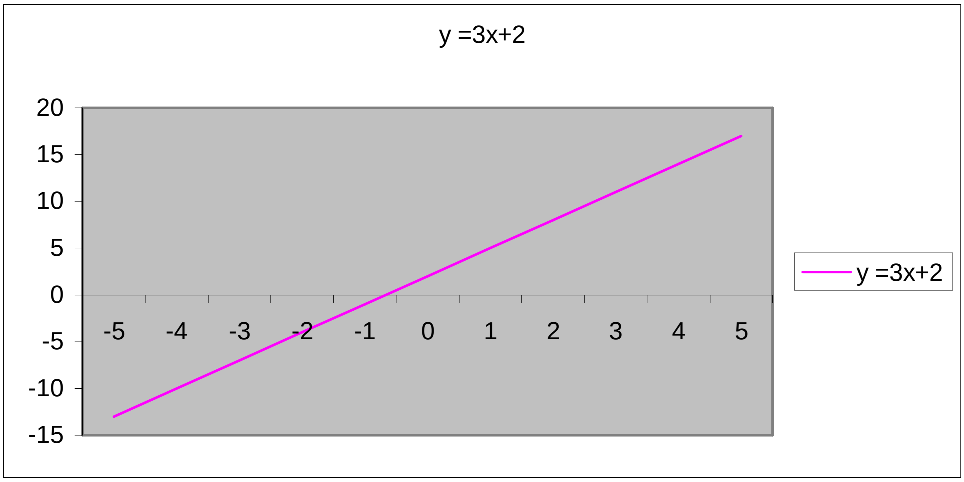


Obr. 3

Zadáváním hodnot do tabulky jsem se v této chvíli nezdržoval, neboť tabulku již studenti měli přepsanou do programu MS Excel. Takže tabulku již máme:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$3x + 2$	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14	17

Pro vytvoření grafu je nutné označit tabulku a kliknout na ikonu pro tvorbu grafu  a z nabídky průvodce grafem vybrat mezi *Standardními typy Spojnicový typ* grafu. Oblast dat byla již vybrána dříve – druhý řádek tabulky, nebo můžeme zadat ručně =List1!$A$1:$L$2, kde je přesně určena hranice tabulky, která se nachází na listě 1 mezi buňkami A1 a L2. Znak $ pouze určuje pevný odkaz. Pomocí záložky *Řada* upravíme *Popis osy X (Kategorie)*, kde je třeba doplnit do pole *Popis osy X (kategorie:)* =List1!$B$1:$L$1 nebo oblast prvního řádku označit pomocí myši. Tlačítkem *Další* se přesuneme do následujícího okna, kde v záložce *Názvy* můžeme pojmenovat celý graf funkce $y = 3x + 2$. Je potřeba zrušit označení v záložce *Mřížky* všechny *Hlavní* i *Vedlejší mřížky*. Nyní graf umístíme na požadované místo. Výsledek je na obr. 16.

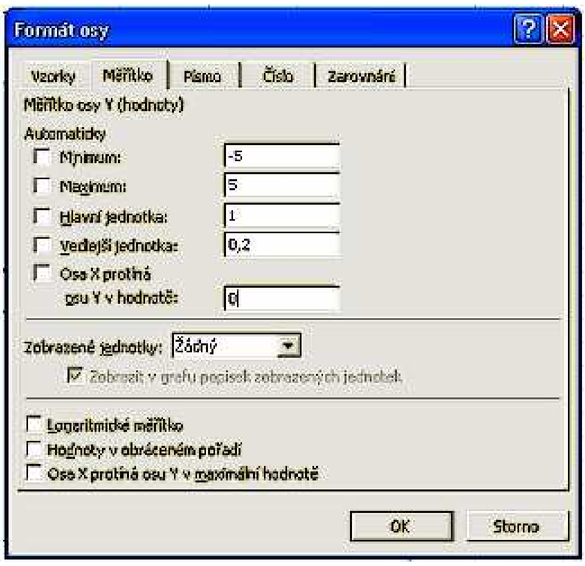


Obr. 4

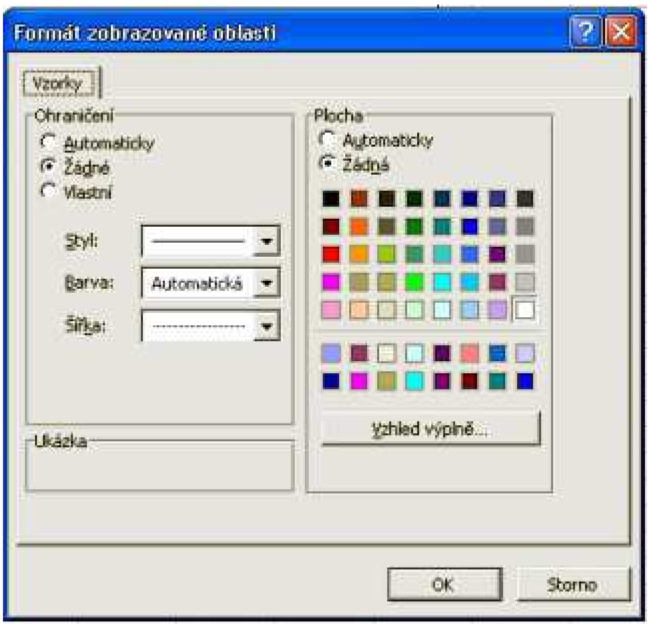
Po zobrazení musíme graf ještě upravit. Pravým tlačítkem myši klikneme na osu *x* a zvolíme *Formát osy*. V nově otevřeném okně (obr. 17) v záložce *Měřítko* nastavíme hodnotu *Osa Y protíná osu X v kategorii číslo:* na hodnotu odpovídající pořadí sloupce, ve které chceme, aby se nám osy *x* a *y* protínaly; v našem případě to je hodnota 6. Dále je nutné zrušit označení

Osa Y protíná osu X mezi kategoriemi. Ještě zbývá upravit formát osy *y*. Opět pravým tlačítkem myši klikneme tentokrát na osu *y*, vybereme *Formát osy*. V otevřeném okně na obr. 18 nastavíme v záložce měřítko hodnoty *Minimum* a *Maximum* na požadované hodnoty; v našem případě lineární funkce hodnoty na – 5 a 5. Dále nastavíme hodnotu *Hlavní jednotka* na 1. Po označení grafu pomocí myši přizpůsobíme rozměry grafu na požadovanou velikost. V závěru se ještě zbavíme šedého pozadí. Klikneme pravým tlačítkem myši kamkoliv na pozadí grafu, zvolíme *Formát zobrazované oblasti* a v zobrazeném okně v oblasti plocha nastavíme vzhled výplně na bílou barvu nebo označíme *Žád-ná*. V oblasti ohraničení označíme *Žádné*. Toto vidíme na obr. 19. Dále je možné měnit barvy zobrazené funkce tím, že pravým tlačítkem myši pokle-peme na křivku grafu, vybereme *Formát datové řady*, v otevřeném okně zvo-líme záložku *Vzorky*, ve které v oblasti čára můžeme měnit barvu. V úplném závěru smažeme název grafu a legendu (klikneme pravým tlačítkem na danou oblast a zvolíme *Vymazat*).

Obr. 5

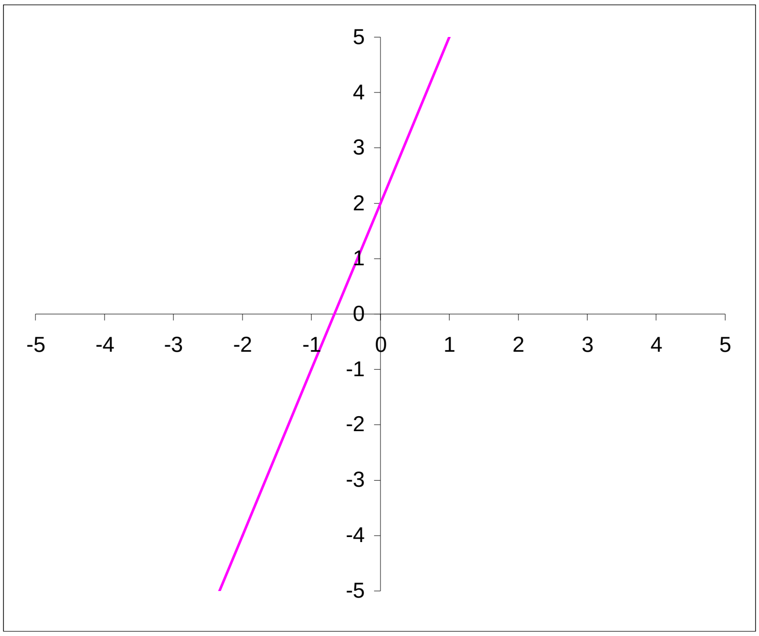


Obr. 6



Obr. 7

Poté, co studenti vše provedli, graf vypadá tak, jak je na obr. 20.

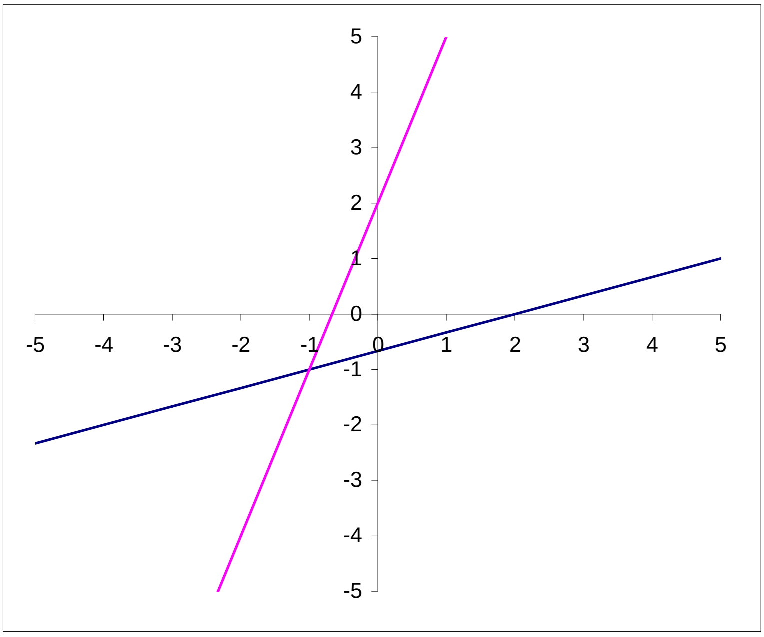


Obr. 20

Nyní měli studenti do stejného obrázku zobrazit i inverzní funkci. Nejprve bylo potřeba vytvořit tabulku. Studenti měli hodnoty spočítané z předchozí hodiny, a tak je pouze zadali do dalšího řádku tabulky. Zde je ukázka:

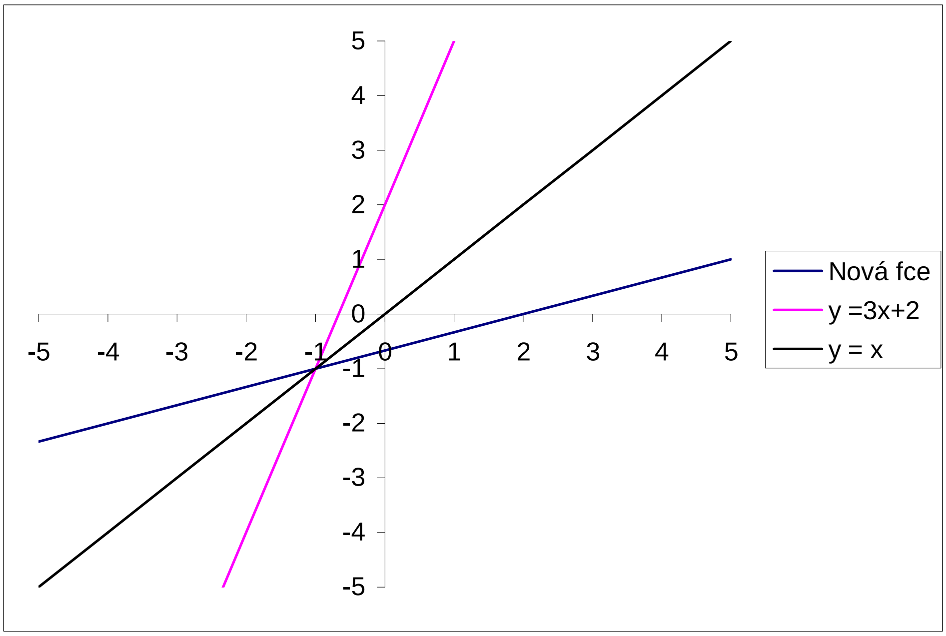
x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$3x + 2$	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14	17
	–2,3	–2	–1,6	–1,3	–1	–0,6	–0,3	0	0,33	0,66	1

Názvem funkce ani funkčním předpisem jsme se v tuto chvíli vůbec nezabývali. Když máme takto připravenou tabulku, klikneme pravým tlačítkem myši kamkoliv na graf a vybereme *Zdrojová data*, kde v záložce *Řada* v části *Řady* musíme tlačítkem *Přidat* přidat řadu. Její hodnoty zadáme buď přímo označením řádku v tabulce nebo ručně takto =List1!$B$3:$L$3. *Název* řady můžeme zadat ručně nebo určit odkaz na první buňku třetího řádku tabulky. To je výhodnější, neboť se název bude dynamicky měnit podle obsahu buňky. Na obr. 21 vidíme výsledek.



Obr. 21

Pro lepší matematickou představivost jsem chtěl po studentech, aby do tohoto grafu zobrazili ještě funkci $y = x$. Když máme v jednom obrázku dvě a nebo více funkcí, je výhodné zobrazit legendu s popisem funkcí pro přehlednost. Hodnoty funkce $y = x$ máme již v prvním řádku tabulky, tak už jen musíme v *Zobrazovaných datech* přidat další řadu. Legendu přidáme v *Možnostech grafu* v záložce *Legenda* zaškrtnutím *Zobrazit legendu*. Výsledek tohoto snažení je vidět na obr. 22.



Obr. 22

V průběhu všech výše popsaných úprav jsem některé studenty žádal, aby svoji práci v různém stádiu rozpracovanosti ukládali na síťový disk, odkud jsem použil některé obrázky v této práci. V závěru tohoto příkladu mi všichni studenti své výtvory zaslali do mé e-mailové schránky.

Kapitola 8

Kvadratická funkce v Excelu

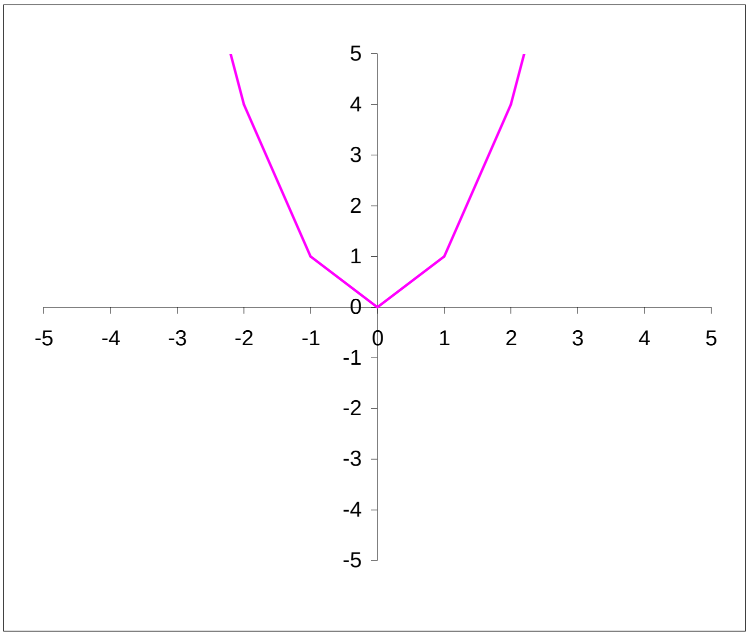
8. 1. Tabulka funkce

Nyní měla přijít na řadu kvadratická funkce $y = x^2$ zobrazovaná v Excelu. Než jsme začali sestavovat tabulku, rozhodl jsem o doplnění terminologie. Kontrolou části domácího úkolu a diskusí nad ním jsme přišli k názvům pro inverzní funkci, které navrhli studenti: funkce negativní, funkce opačná, funkce obrácená, funkce opačné operace, funkce zvrácená, funkce souměrná, funkce přeložená. Některé názvy více, jiné méně vystihují inverzní funkci. Mezi nejvýstižnější bych řadil název *funkce opačné operace*. Jiné příklady bychom z hlediska překladu mohli řadit za přesnější, ale matematicky inverzní funkci vystihují hůře. Nedokáži si představit, jaký název by se pro inverzní funkci našel, kdyby měl být ryze český. Od tohoto okamžiku studenti znali název *inverzní funkce* a začali ho používat.

Zadání bylo jasné: zobrazte pomocí výpočetní techniky graf funkce $y = x^2$ a graf funkce inverzní. Na základě zkušeností studenti vyplnili tabulku většinou takto:

y = *x*	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y = *x*^2	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Této tabulce odpovídá graf na obr. 23. Někteří studenti přicházeli s otázkou: „Jak to, že je ten graf tak hranatý?“ Je samozřejmé, že program MS Excel pouze úsečkami spojí zobrazené hodnoty, a díky tomu graf vypadá tak jako na obrázku. Sami studenti přišli na potřebu rozšířit tabulku.



Obr. 8

Pro velmi slušné vykreslení tohoto grafu stačí pracovat s tabulkou, která obsahuje okolo 30 buněk. Studenti však měli za úkol sestrojit tabulku obsahující 101, respektive 102 sloupců. Na intervalu $\langle -5;5 \rangle$ je to poměrně velmi slušná hustota, na každém centimetru se tak zobrazí 10 bodů a graf vypadá velmi pěkně. V programu je přehlednější práce s tabulkou, která je transponovaná

na výšku, proto asi třetina studentů se rozhodla pracovat s touto tabulkou.

Teprve nyní studenti přišli na potřebu zjednodušit si zadávání hodnot do tabulky, a to jak hodnot prvního sloupce (řádku), tak funkčních hodnot. Program toto umožňuje automaticky. Zadávání hodnoty do prvního sloupce (řádku) znala asi třetina studentů, ostatní to velmi snadno pochopili od svých spolužáků nebo ode mne. Se zadáním druhého řádku si nevěděl rady nikdo. Pouze dvě studentky zadávaly hodnoty na základě výpočtu na kalkulačce. V tuto chvíli si neodpustím poznámku, že jejich píle je obdivuhodná, avšak ubíjí kreativní a logické myšlení.

Do druhého sloupce (řádku) je potřeba zadat vzorec, na základě kterého program sám hodnotu vypočítá. Jestliže jsme přesvědčeni o správnosti vzorce, tak jej zkopírujeme do ostatních sloupců (řádků) tabulky a program vše vypočítá sám.

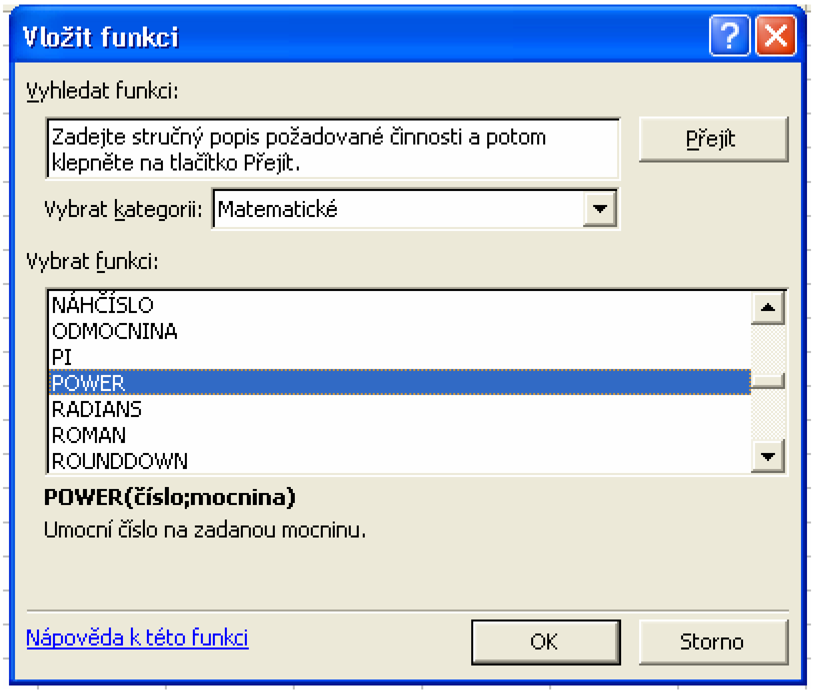
Jestliže začneme tabulku tvořit v levém horním řádku nového sešitu programu MS Excel, do buňky A1 napíšeme x, do buňky A2 napíšeme $y = x^2$. Tím jsme si pouze pojmenovali řádky, do kterých vzápětí budeme dosazovat hodnoty. K sestrojení grafu tyto řádky prakticky nepotřebujeme. Do druhé a třetí buňky prvního řádku zadáme hodnoty – 5 a – 4,9 v tomto pořadí. Obě buňky označíme, v pravém dolním rohu označené oblasti je malý čtvereček, který uchopíme kurzorem myši a odtáhneme ho o 99 buněk vpravo. Cestou se nám zobrazuje hodnota poslední označené buňky, a tak nemusíme počítat, stačí počkat do hodnoty 5. Tím máme připraven první řádek tabulky.

Naučit studenty správnou syntaxi zadávání vzorců do programu byl jeden z cílů této práce. Vzorec zadáme do buňky B2 – druhá buňka druhého řádku. U funkce $y = x^2$ máme dvě možnosti, stejné jako při práci s kalkulačkou nebo tabulkami.

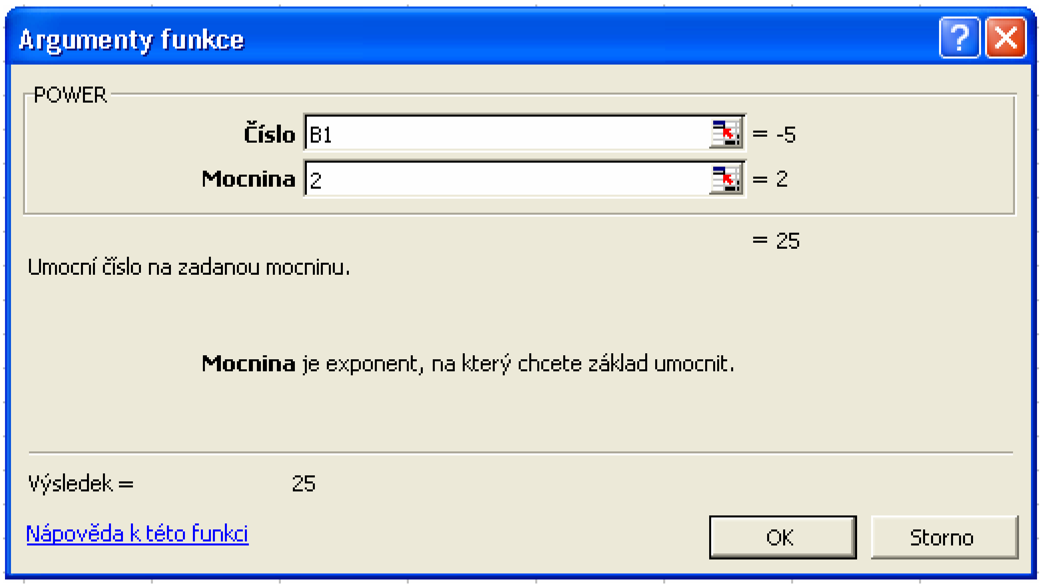
První možnost je zadání vzorce na základě matematické definice druhé mocniny, tedy $a^2 = a \cdot a$, a vzorec pro program vypadá takto: =B1*B1. Program dosadí do buňky B2 hodnotu buňky B1 vynásobenou hodnotou buňky B1. V buňce B2 se objeví číslo 25.

Druhá možnost zadání vzorce je na základě předdefinované funkce programu. Se studenty musíme postupovat podle tohoto postupu. Nejprve musíme označit buňku B2, pak kliknout na panelu nástrojů na nabídku *Vložit* a z rozbaleného okna vybrat *Funkce*. Otevře se nám okno na obr. 24.

V položce *Vybrat kategorii* z nabídky vybereme *Matematické* a v části *Vybrat funkci* vyhledáme funkci *POWER*, která umocní číslo na zadanou mocninu. Po stisknutí tlačítka *OK* se nám rozbalí okno obr. 25.



Obr. 9



Obr. 10

Zde do pole *Číslo* zadáme souřadnice buňky, jejíž hodnotu chceme umocnit, v našem případě B1, a do pole *Mocnina* zadáme požadovanou mocninu, v našem případě 2. Po stisknutí tlačítka *OK* se nám do buňky B2 zapíše vzorec =POWER(B1;2) a vypočítá se nám hodnota 25. Označíme buňku B2, uchopíme myší čtvereček v pravém spodním rohu a táhneme o 100 sloupců vpravo. Nebo můžeme vzorec zkopírovat do požadovaných buněk pomocí příkazů *Kopírovat* a *Vložit*. Pro úplnost uvedu klávesové zkratky pro tyto příkazy *kopírovat*: *CTRL+C* a *vložit*: *CTRL+V*. Výše popsaný postup je pouze pro tabulku vodorovnou, se kterou pracovala většina studentů. Pro tabulku transponovanou je postup velmi podobný, proto ho zde neuvádím, bude se lišit pouze souřadnicemi některých buněk.

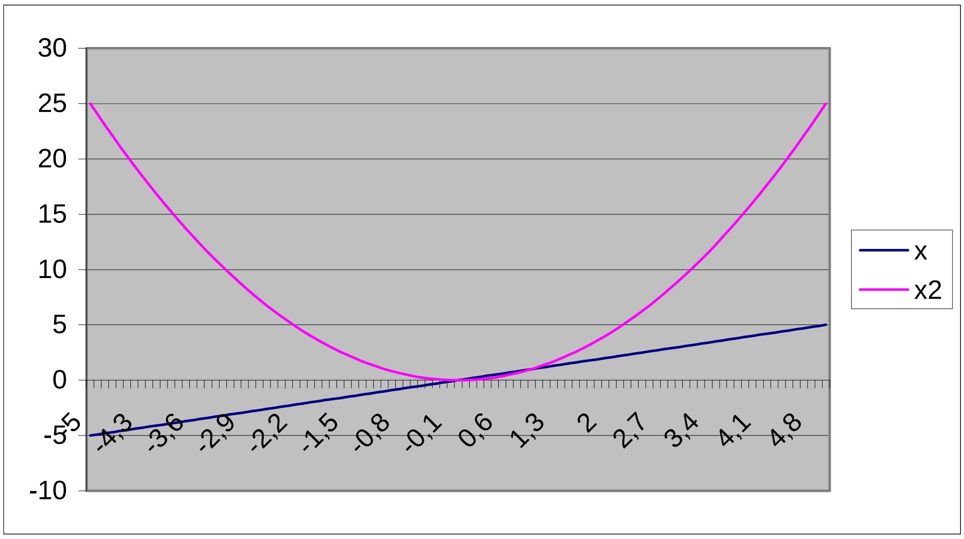
8. 2. Graf kvadratické funkce

Tvorba grafu je podobná jako u grafu lineární funkce, pouze pracujeme s obsáhlejší tabulkou. Na rozdíly někteří studenti přišli sami a ve všech skupinách, celkem 7 studentů dokázalo aplikovat celý postup samostatně. Ostatní jsem musel méně či více navést ke korektnímu výsledku.

Opět označíme celou tabulku a klikneme levým tlačítkem myši na ikonu grafu. V otevřeném okně vybereme mezi *Standardními typy Typ grafu: Spojnicový*. Po kliknutí na tlačítko *Další* přejdeme do nového okna, ve kterém v záložce *Řada* vyplníme *Popisky osy X (kategorie):* hodnotou =List1!$B$1:$CX$1. Druhá možnost je označit první řádek tabulky, ve kterém jsou hodnoty proměnné *x*. V tomto okamžiku již není třeba nic doplňovat a můžeme okno ukončit tlačítkem *Dokončit*.

Zobrazený graf na obr. 26 musíme ještě řádně zformátovat, aby vypadal jako graf funkce. V tuto chvíli je třeba začít upravovat formát os grafu. Na obr. 27 a 28 jsou vidět hodnoty, které je třeba nastavit pro náš příklad. Tabulka obsahuje 102 sloupců, tedy sloupec pro $x = 0$ je jednapadesátý. Do okna *Formát osy* v záložce *Měřítko* dosadíme do pole *Osa Y protíná osu X v kate gorii číslo:* hodnotu 51 a do pole *Počet kategorií mezi Mezi popisky značek:*

a *Počet kategorií Mezi značkami:* doplníme 10. Tím se nám bude zobrazovat hodnota prvního, jedenáctého, … sloupce. Nezapomeneme zrušit označení *Osa Y protíná osu X mezi kategoriemi*.

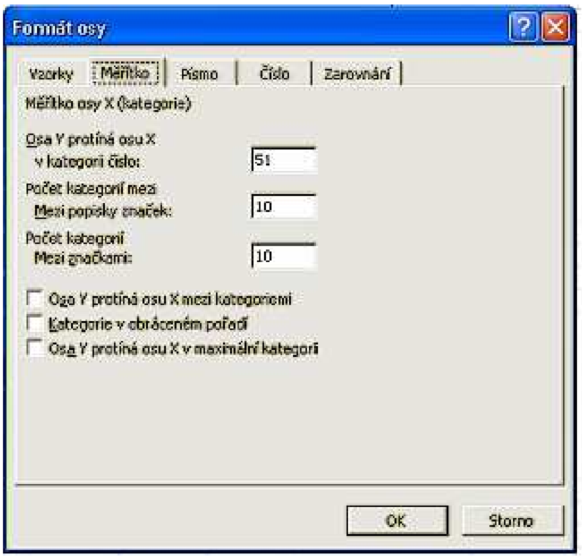


Obr. 11

Pro osu *y* do okna *Formát osy* v záložce *Měřítko* dosadíme do polí *Minimum* a *Maximum* hodnoty – 5 a 5. Zobrazovanou oblast zformátujeme stejně jako u lineární funkce. Výsledek máme na obr. 29.

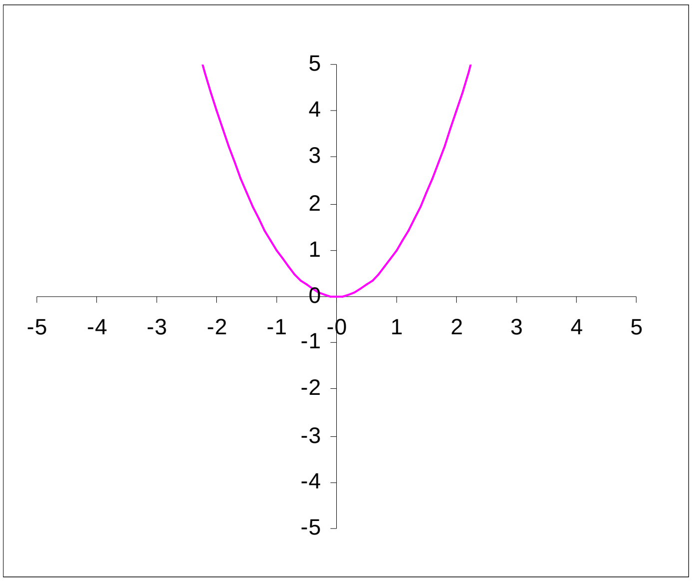
Do takto připraveného grafu měli studenti zobrazit ještě inverzní funkci. U ryze kvadratické funkce to šlo celkem snadno, vždyť inverzní funkce k $y = x^2$ je druhá odmocnina a její předpis je studentům notoricky znám. Stačilo tabulku rozšířit o další jeden řádek (sloupec) a do druhé buňky zadat vzorec pro výpočet hodnot inverzní funkce, a to $y = \sqrt{x}$. Následně tento vzorec studenti zkopírovali do ostatních polí tabulky a graf byl hotov.

Je zajímavé, že většina studentů, asi čtyři pětiny z nich, při zadávání vzorce do programu MS Excel použila vzorec =ODMOCNINA(B2), přestože jsem o této funkci Exelu se studenty nehovořil. To považuji za skvělé, protože studenti začali v Excelu samostatně pracovat a vyhledávat nové, zatím neponané skutečnosti. Zbývající pětina použila vzorec =POWER(B2;1/2), se kterým se studenti již dříve seznámili a výborně upravili vstupní hodnoty pro požadovanou funkci. Jen asi ve dvou případech jsem musel studenty navést k správnému vzorci.

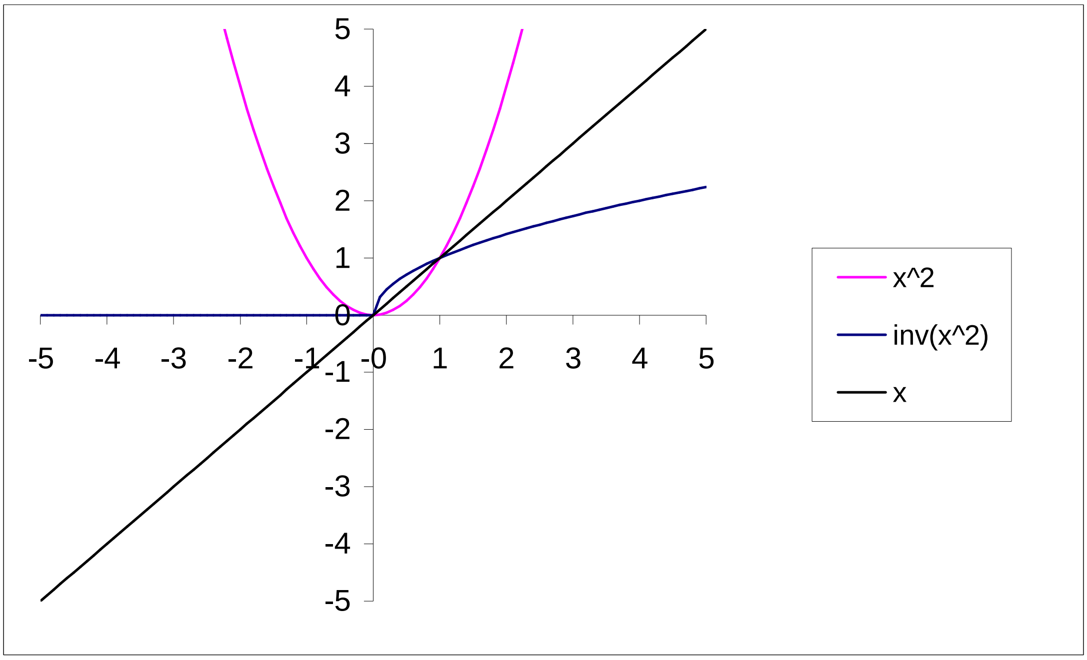


Obr. 12

Obr. 13



Obr. 14



Obr. 15

Pro úplnost studenti do téhož obrázku nechali zobrazit graf funkce $y = x$. Dále jsme se dohodli na označení inverzní funkce pro grafické zobrazení, a to na $y = \mathrm{inv}(x^2)$. Na úplný závěr studenti zobrazili pro názornost legendu grafu a výsledek vidíme na obr. 30.

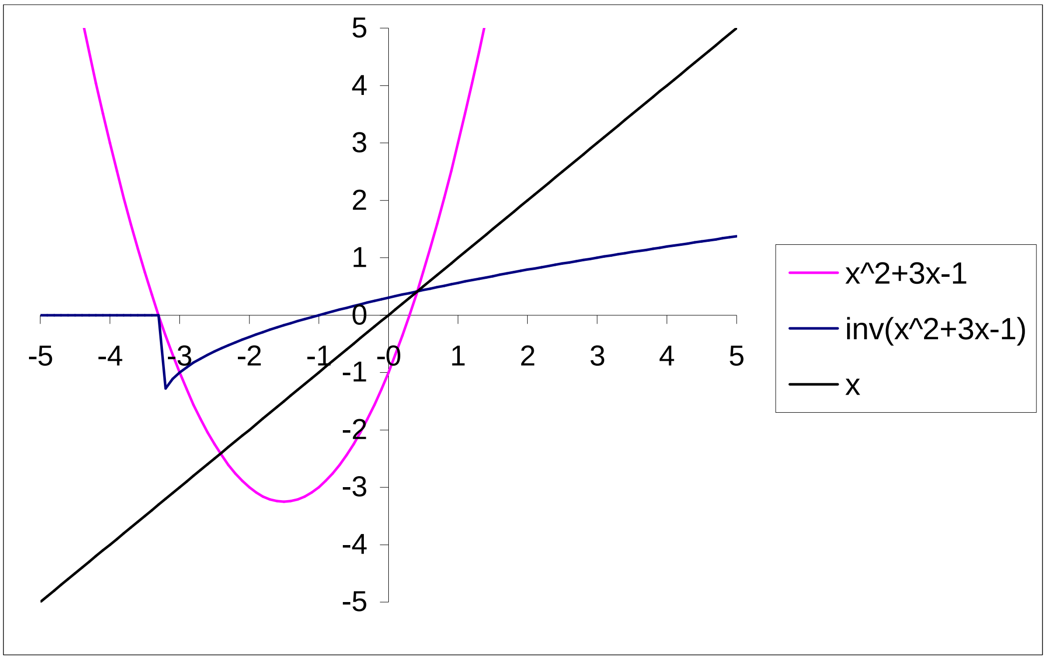
Zobrazení základní kvadratické funkce nám zabralo asi 30 minut. Soubor si studenti uložili na síťový disk a ve zbytku hodiny jsme začali zobrazovat ostatní kvadratické funkce. Jednalo se o ty funkce, které studenti již měli zpracovány písemně. Abychom si ušetřili práci s formátováním grafu, stačilo pouze změnit vzorce v druhém sloupci (řádku) tabulky, ten pak zkopírovat do celé tabulky a graf se nám překreslil v závislosti na nových hodnotách tabulky.

Teprve v této chvíli skoro všichni studenti začali mít potřebu umět vyjádřit funkční předpis inverzní funkce. Pokud studenti znají funkční předpis, syntaxe vzorce pro MS Excel není tak složitá.

Ve dvou třídách se našel jeden nebo dva studenti, kteří zobecnili svůj postup, při kterém vyplňovali tabulku na pracovním listu. Postup se však v každé skupině trošičku lišil. V první skupině studenti nejprve zaměnili *x* za *y* a *y* za *x* a následně pak vyjádřili funkční předpis osamostatněním proměnné *y*. Tento postup se vyskytuje například v publikacích [8] a [15]. Studenti druhé skupiny nejprve z rovnice funkce vyjádřili *x* a na závěr zaměňovali proměnné, stejně jako v knize [1]. V jedné skupině studentů jsem musel princip prozradit. Vybral jsem první postup.

Teď měli studenti všechny vstupní informace k tomu, aby zobrazili zbývající kvadratické funkce. Zhruba třetině studentů se to povedlo v této hodině, zbytek to musel dodělat za domácí úkol. Jako dobrovolný úkol jsem zadal vytvořit soubor, který by reagoval na zadání koeficientů kvadratické funkce a vykreslil graf funkce a inverzní funkce. Výsledky mi zase studenti zasílali do mojí e-mailové schránky.

Při zobrazování těchto inverzních funkcí jsme se studenty poprvé narazili na problém, který se nám nepodařilo odstranit. Pokud je v tabulce vynechaná hodnota v buňce, program tento bod nezobrazí. Pokud ale v buňce je vynechaná hodnota na základě nějakého výpočtu, nebo pokud hodnota není matematicky definována, tak program tyto hodnoty sám nahradí nulou. Ptal jsem se mnoha lidí, kteří s MS Excelem pracují, dokonce jsem vznesl dotaz na technickou podporu společnosti Microsoft, ale nikdo mi nebyl schopen poradit, jak toto chování programu upravit. Příklad je vidět na obr. 31, kde je počáteční hodnota inverzní funkce spojena s nulovou hodnotou. Tento jev můžeme odstranit smazáním obsahu buněk v tabulce. Při práci s dynamicky se měnícími hodnotami je to celkem problém, protože grafy samozřejmě nezačínají ve stejné poloze.



Obr. 31

Analýzou studentských prací jsem objevil několik zajímavostí, jejichž podoba je na přiloženém CD, stejně tak jako ukázky studentských prací.

Dva studenti vytvořili graf, který byl grafem inverzní funkce, ale při bližším zkoumání jsem zjistil, že vzorec, který popisuje inverzní funkci, je zadán jinak, než bych očekával. Tito studenti vzali za základní funkci odmocninu a tu pak posunuli do osově zobrazeného vrcholu paraboly. Tomuto postupu nelze nic vytknout, jde o úžasný vhled studentů do problému a elegantní řešení.

S inverzní funkcí k ryze kvadratické funkci a k funkci typu $y = (x + a)^2$ studenti neměli problémy a asi čtvrtina byla schopna samostatně vytvořit graf, který dynamicky reagoval na změnu zadávaných hodnot.

Sestrojit inverzní funkci k jedné konkrétní úplné kvadratické funkci se podařilo jen asi dvěma studentům, kteří postupovali výše popsaným způsobem. Jeden z nich dokázal svou práci zobecnit pro všechny kvadratické funkce (naleznete v digitální příloze).

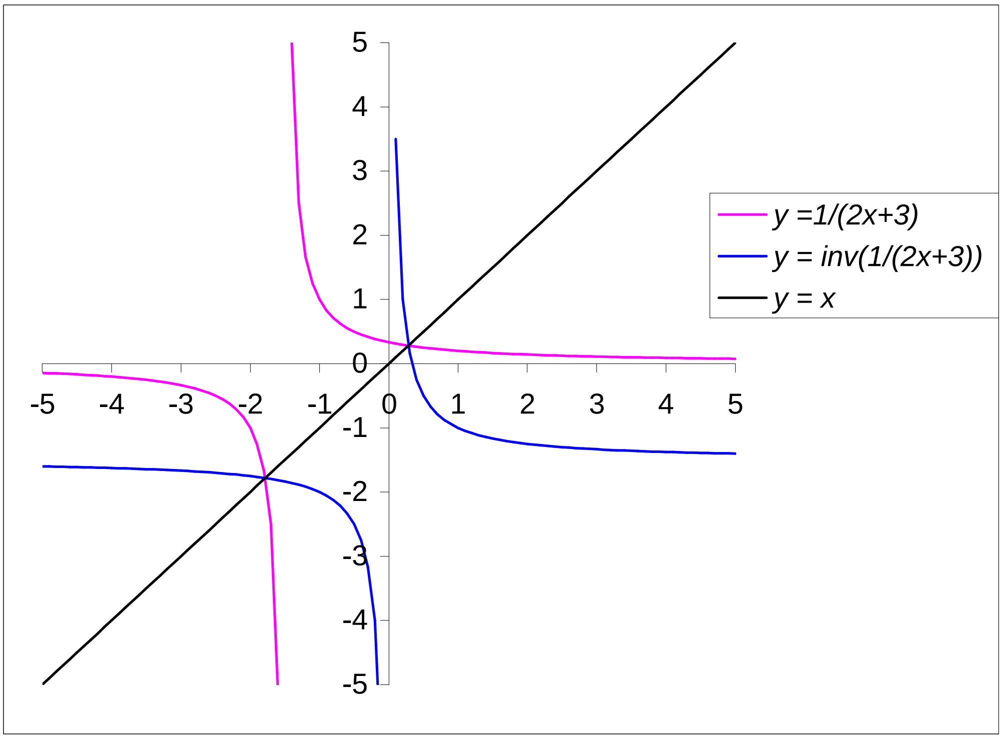
Vypočítat obecný předpis pro inverzní funkci ke kvadratické funkci je pro studenty střední školy složité a v běžných učebnicích, které zde uvádím, o tom není zmínka.

Kapitola 9

Některé další funkce v Excelu

9. 1. Lineární lomená funkce

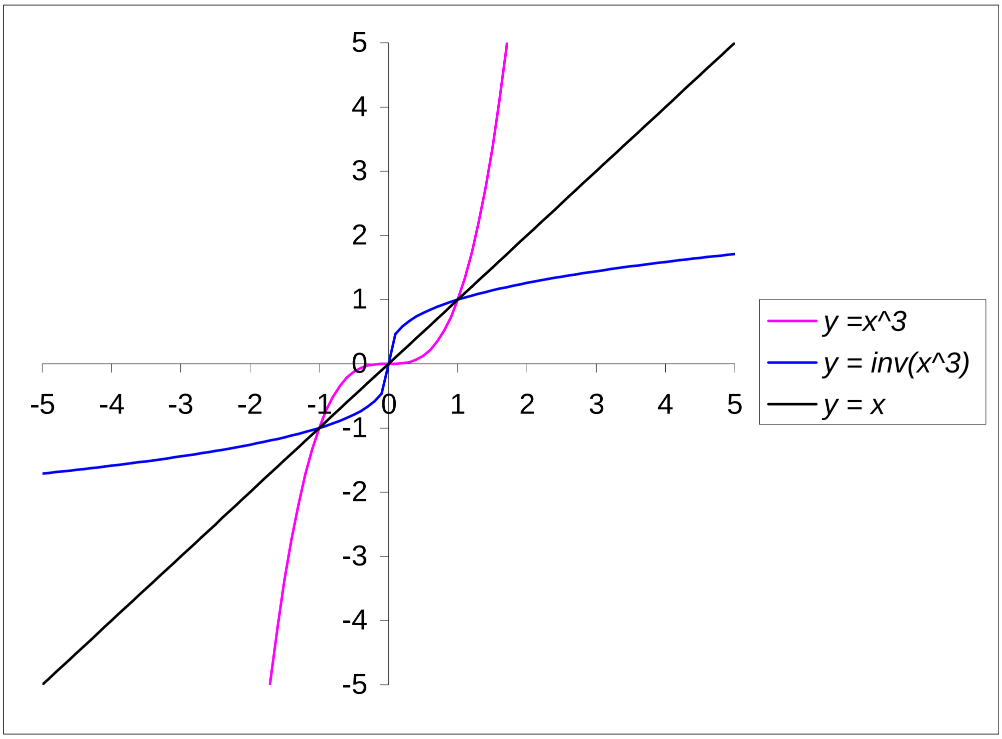
Následující hodinu přišly na řadu další nelineární funkce. Začali jsme funkcí lineární lomenou, konkrétně funkcí $y = \dfrac{1}{2x+3}$. Graf funkce a inverzní funkce měli všichni během několika málo minut. Jediným drobným problémem byl fakt, že program při vykreslování grafu spojoval obě větve hyperboly přímkou. Tuto drobnost více než polovina studentů sama odstranila a zbytek po drobné nápovědě také. Ukázka hotového grafu je na obr. 32.



Obr. 32

9. 2. Kubická parabola

Následovala kubická parabola. Funkci $y = x^3$ zobrazili téměř všichni správně. Pokud se blíže podíváme na způsob, tak zhruba třetina studentů použila předdefinovanou funkci programu MS Excel, čemuž odpovídá vzorec =POWER(B1;3). Naproti tomu asi dvě třetiny studentů zadávaly třetí mocninu jako součin. V tomto případě vzorec vypadá takto: =B1*B1*B1. Bylo by zajímavé pozorovat, od které mocniny by předdefinovanou funkci začala používat většina studentů. Se syntaxí inverzní funkce neměla problém asi pětina studentů. Většina studentů začala hledat předdefinovanou funkci třetí odmocnina v programu a když ji nenašla a nevěděla jak dál, ptala se. Po drobném upozornění na to, že odmocnina se dá zapsat jako mocnina, dospěla většina studentů ke vzorci =POWER(B1;1/3). Ukázka jedné studentské práce je na obr. 33.



Obr. 33

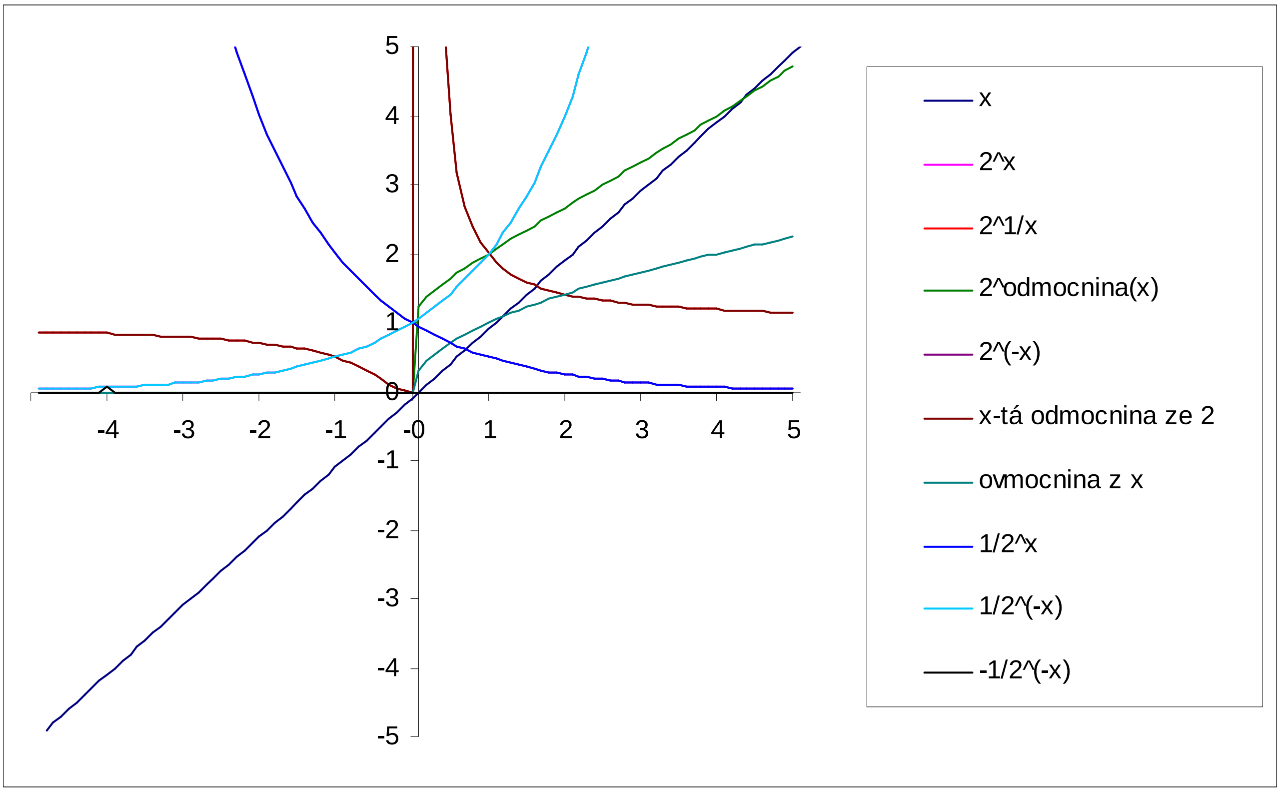
Kapitola 10

Funkce $y = 2^x$ v Excelu

Další skupinou funkcí jsou funkce exponenciální. I když je tvarů funkcí exponenciálních mnoho, omezil jsem se pouze na jednu, a to na funkci $y = 2^x$. Tato funkce je mezi exponenciálními funkcemi jednodušší a některé její celočíselné hodnoty se dají snadno určit zpaměti.

Funkci zobrazili studenti velmi rychle, avšak najít funkční předpis pro funkci inverzní se jim nedařilo. Studenti přesně věděli, jak tato inverzní funkce bude vypadat, dokonce některé její hodnoty byli schopni vypočítat. Vymýšleli různé návrhy různých funkcí, které by mohly být funkcí inverzní k $y = 2^x$. Návrhy funkcí, které by mohly být funkcí inverzní, jsem psal na tabuli. Mezi všemi návrhy jsem vybral ty nejzajímavější: $y = 2^{\frac{1}{x}}$, $y = \sqrt[x]{2}$, $y = \sqrt[2]{x}$, $y = 2^{\sqrt{x}}$, $y = 2^{-x}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$, $y = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-x}$. Všechny tyto funkce měli studenti sami zobrazit a rozhodnout, zda některá z těchto funkcí může být inverzní k zadané funkci. Jak to zkoušeli, sami přicházeli na to, že žádná z těchto funkcí to není. Na obr. 34 je ukázka jedné studentské práce, ve které se student pokusil zobrazit všechny navrhované funkce do jednoho grafu. Je zde velni přehledně vidět, že ani jedna z funkcí není inverzní funkcí k funkci $y = 2^x$. Závěrem hodiny jsem zadal za úkol pokusit se nalézt inverzní funkci doma.

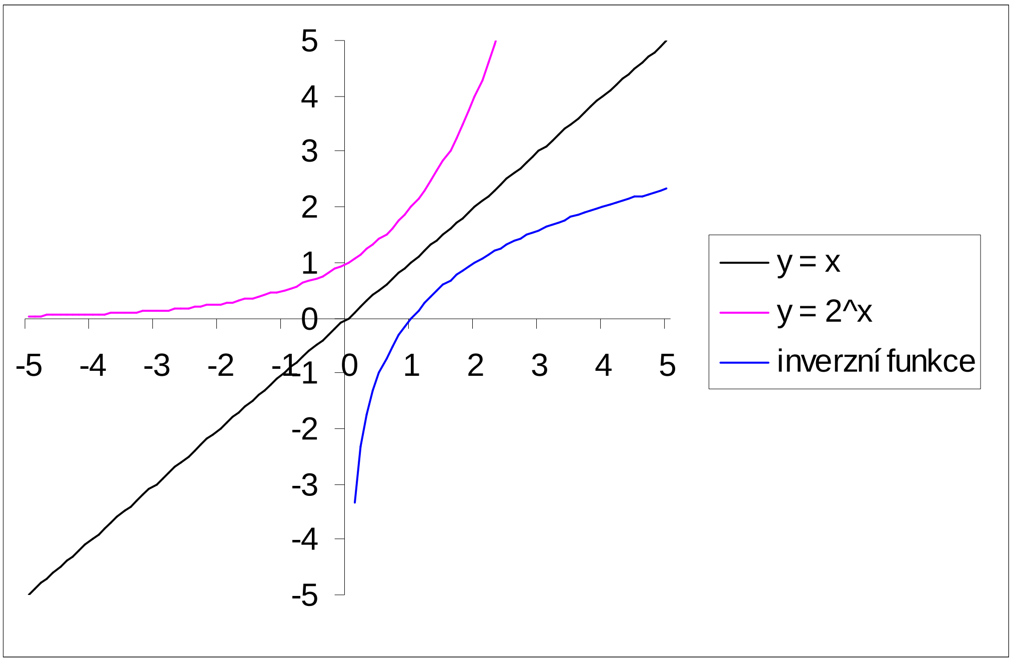
Na začátku další hodiny se u čtyřech studentů objevilo správné řešení. Zde uvedu tvrzení jednoho studenta: „Je to ňákej logaritmus nebo co a já vůbec nevím, jak na to otec přišel.“ Ostatní tři měli také řešení s dopomocí rodičů nebo starších kamarádů.



Obr. 34

V této hodině jsem definoval logaritmickou funkci jako inverzní funkci k funkci exponenciální. Dále jsem studentům vysvětlil, že funkční hodnoty logaritmické funkce se nazývají logaritmy. Následujících několik minut jsme věnovali syntaxi logaritmické funkce v Excelu, abychom mohli dokončit graf inverzní funkce k funkci $y = 2^x$. Vzorec pro inverzní funkci bude vypadat tak-to =LOGZ(B1;2). Na obr. 35 je práce jednoho studenta.

Po celé předešlé práci se studenty, která trvala 6 až 8 vyučovacích ho-din, jsem měl v tuto chvíli připravenou situaci pro další výuku logaritmů a logaritmických rovnic. Studenti v následujících hodinách výuky chápali nové pojmy a řešili příklady s logaritmy rychleji, než jsem tomu byl zvyklý z gym-názia. Delší čas, který jsem věnoval inverzní funkci, následně usnadní studen-tům další výuku.



Obr. 35

Kapitola 11

Inverzní funkce k funkcím goniometrickým v MS Excelu

11. 1. Funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$

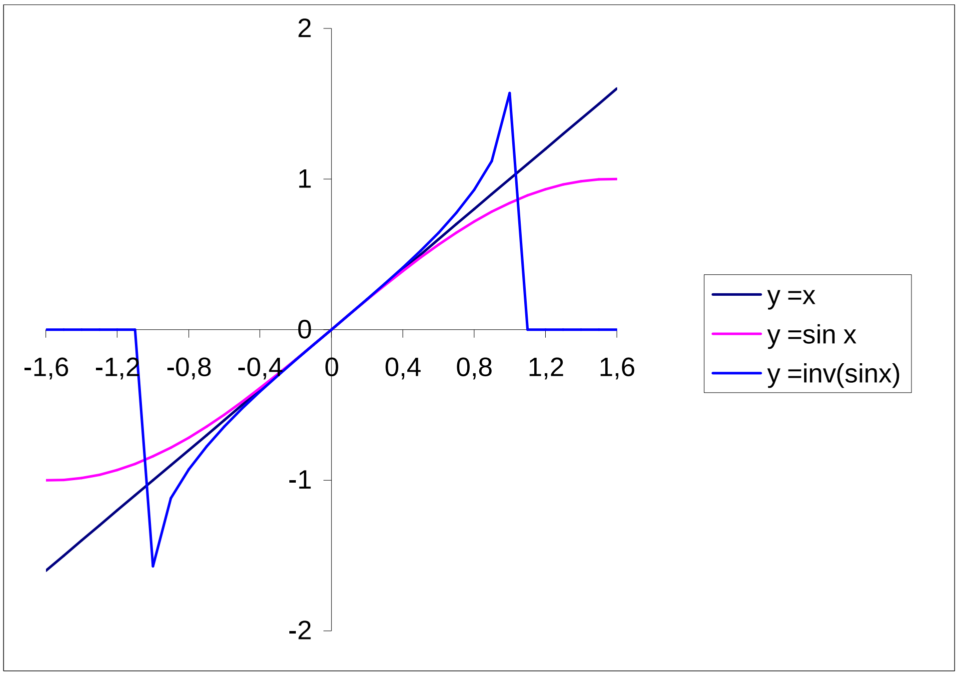
Přestože se studenti střední školy s pojmem cyklometrické funkce nesetkávají, s těmito funkcemi pracují při řešení některých goniometrických rovnic. Z cvičného hlediska jsem se rozhodl je zařadit do výuky. Asi po pěti týdnech běžné výuky, kdy jsem probíral další látku dle plánu, a to exponenciální a logaritmické rovnice, jsme se se studenty vrátili k inverzní funkci, a to k inverzní funkci k funkcím goniometrickým. Pochopení této problematiky pomůže studentům při řešení goniometrických rovnic.

Funkce $y = \sin x$ je prostá na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a nabývá funkčních hodnoty z intervalu $\langle -1; 1 \rangle$. Proto bude stačit omezit se při zobrazování funkce na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Se studenty jsme pracovali nejdříve v učebně, kde vyplňovali pracovní list (viz příloha č. 5). Hodnoty do pracovního listu zadávali pomocí kalkulačky nebo pomocí matematicko-fyzikálních tabulek.

Před vyplňováním tohoto pracovního listu, jsem se studenty zopakoval pojem funkce a inverzní funkce. Protože inverzní funkci studenti již znali, prozradil jsem jim názvy inverzních funkcí k funkcím goniometrickým a upřesnil název *Cyklometrické funkce*. Dále jsme se studenty vybrali intervaly, na kterých je funkce $y = \sin x$ ryze monotónní, a určili intervaly, na kterých je definována funkce inverzní. To vše nám zabralo asi 10 minut. Následně jsme přešli do počítačové pracovny, ve které jsme začali pracovat s programem MS

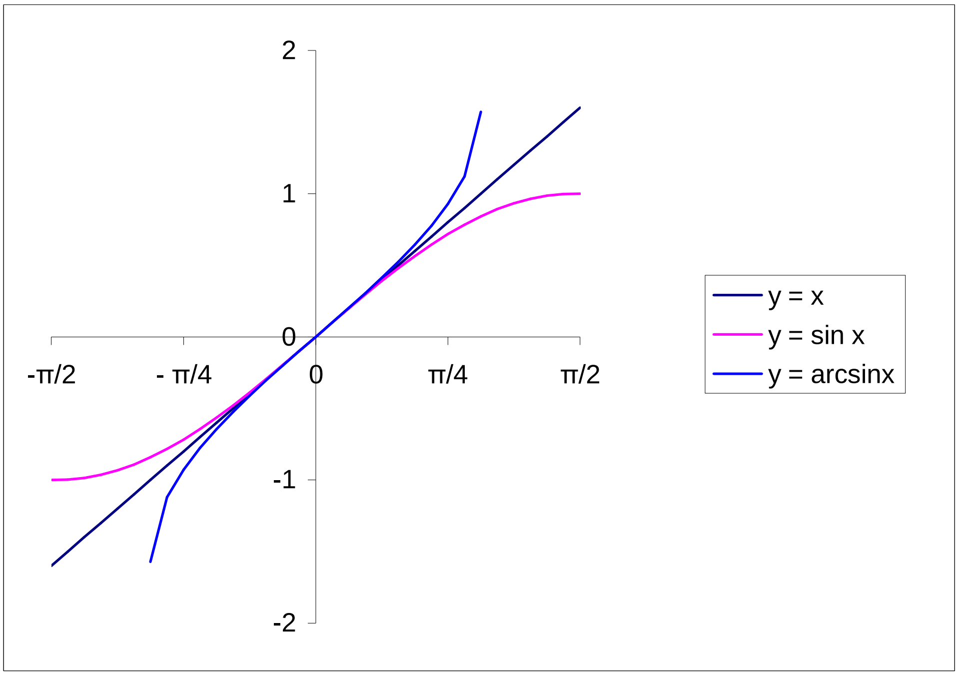
Excel.

Studenti začali pracovat s funkcí $y = \sin x$. Ve většině případů měla tabulka pro tvorbu grafu 34 sloupců. První řádek obsahoval hodnoty od –1,6 vzrůstající o 0,1 do čísla 1,6. Program MS Excel má mezi matematickými funkcemi předdefinovanou funkci *sin x* i funkci *arcsin x*, proto zadávání hodnot šlo studentům velmi rychle, stačilo zadat do buňky v druhém řádku vzorec =SIN(B2) a ten zkopírovat do ostatních polí tabulky. Pro inverzní funkci pak studenti zadávali vzorec =ARCSIN(B2). V polích tabulky, pod hodnotami, pro které není funkce $y = \arcsin x$ definována, počítač (ne)vypočte hodnotu #NUM!, která nás upozorňuje na matematickou nesrovnalost. Přesto při zobrazování grafu počítá v těchto polích s nulovou hodnotou. Neupravený graf převzatý z jedné studentské práce uvádím na obr. 36.



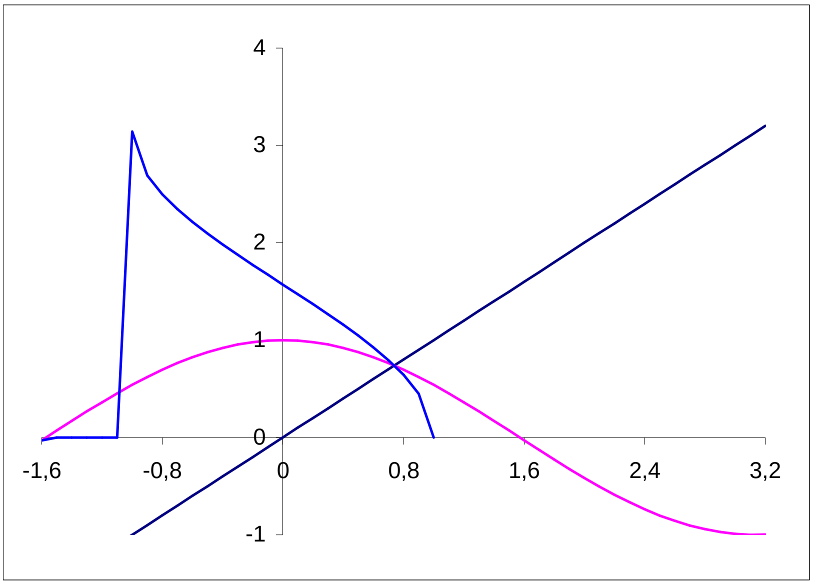
Obr. 36

Na obr. 37 je vidět graf, ve kterém student odstranil z polí, ve kterých není funkce definována, hodnoty, a dokonce ještě osu x popsal pomocí zlomků čísla π.

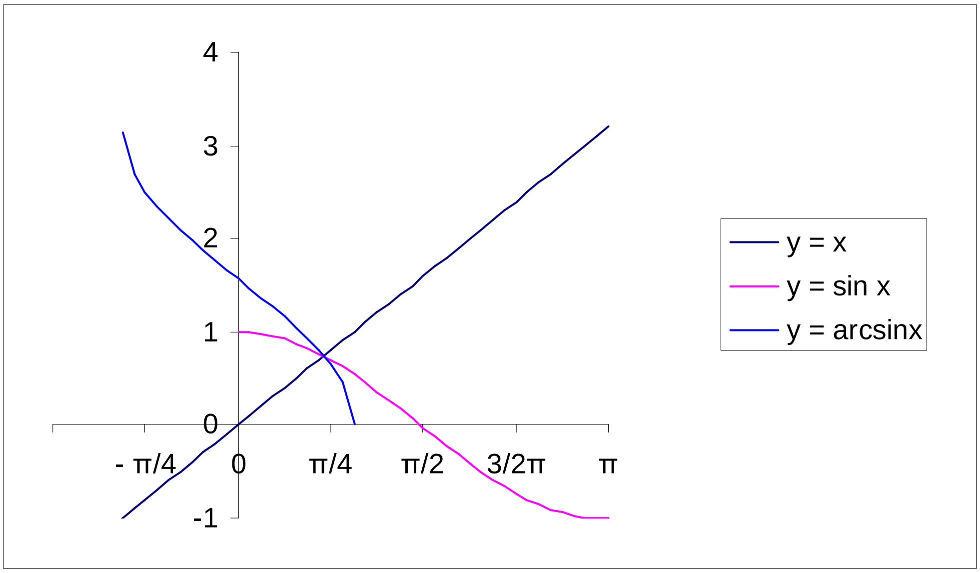


Obr. 37

Následovala funkce *y* = cos *x*, prostá na intervalu $\langle 0;\pi \rangle$. Tato funkce nabývá funkční hodnoty z intervalu $\langle -1;1 \rangle$. Při sestrojování grafu jsme se omezili na interval $\langle -1;\pi \rangle$, ve kterém jsou obě funkce velmi pěkně vidět. Pro vytvoření tabulky jsme používali předdefinované funkce v programu, jímž odpovídají vzorce =COS(B3) a =ARCCOS(B3). Na obr. 38 je vidět průměrná studentská práce, kde se student nezabýval řádným upravením grafu. Mezi nedostatky patří: odlišné měřítko os souřadné soustavy; funkci *y* = cos *x* tento student zobrazuje na celém intervalu $\langle -1;\pi \rangle$ a ne jen na intervalu, na kterém je funkce prostá; graf inverzní funkce je neupraven a první hodnota je spojena s nulovou hodnotou na ose x; a chybí zde legenda. Naopak na obr. 39 je ukázka jedné z nejlepších studentských prací, přesto je vidět, že student použil tabulku i graf z minulého příkladu (což je v pořádku), avšak pozapomněl na změnu pojmenování řádků tabulky, a tak se v legendě objevuje chybně *y* = sin *x* a *y* = arcsin *x*. Také v popisu na ose *x* je drobný nedostatek u hodnoty 3/2π. Není zde jasně vidět zda hodnota je 3/2 násobena číslem π a nebo číslo 3 děleno součinem 2π. Názornější hodnota by měla vypadat 3π/2.



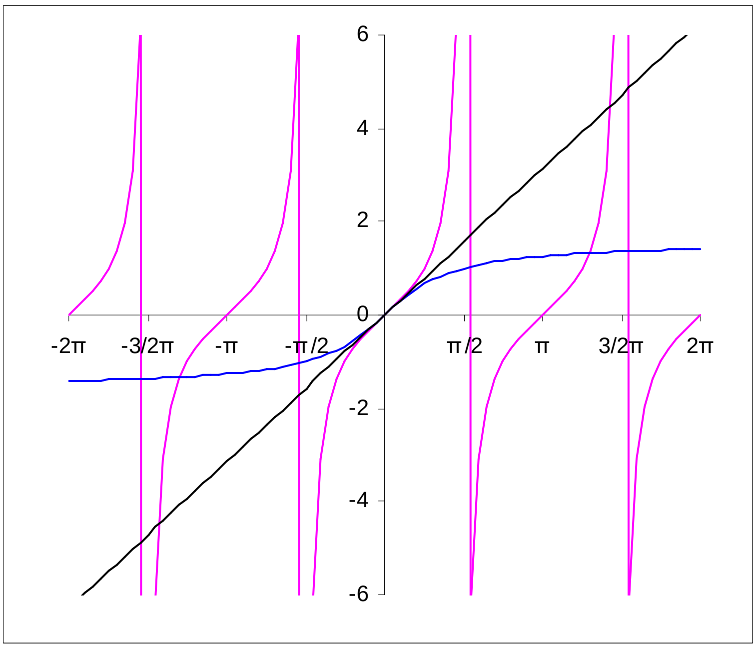
Obr. 38



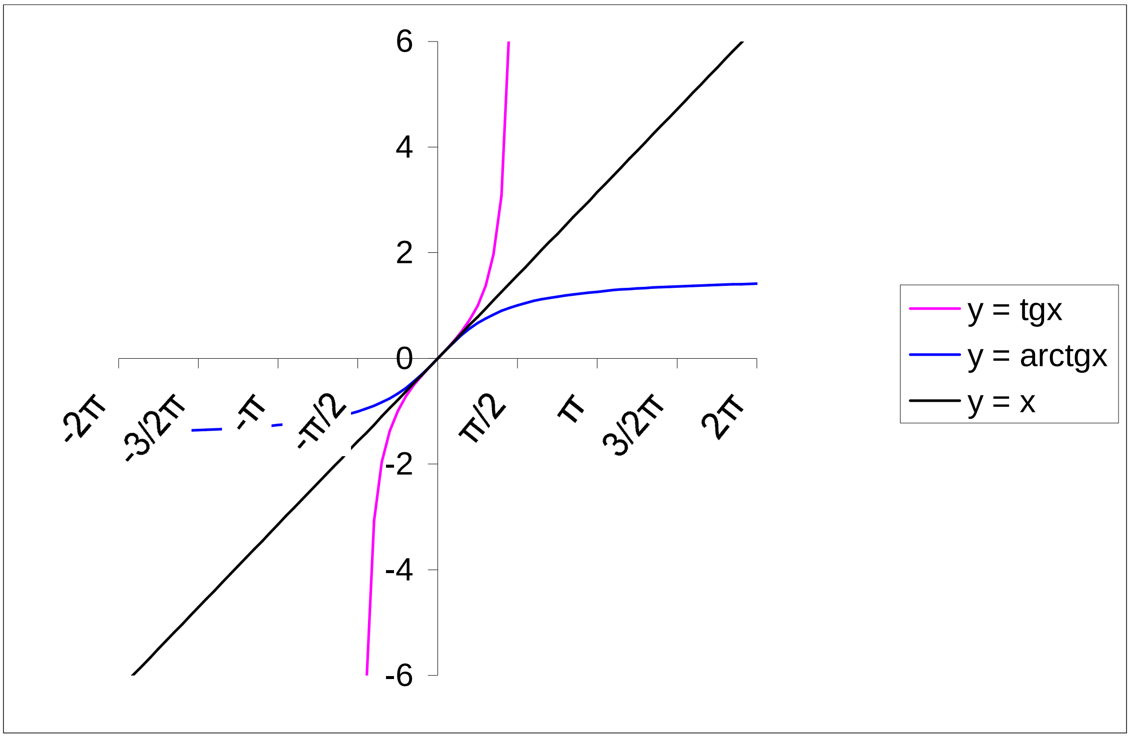
Obr. 39

11. 2. Funkce *y* = tg *x* a *y* = cotg *x*

Poslední vyučovací hodinu, kterou jsem tomuto tématu věnoval, jsem v počítačové pracovně se studenty zobrazoval funkce *y* = tg *x* a *y* = cotg *x*. Funkce *y* = tg *x* je prostá na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ a funkce *y* = cotg *x* je prostá na intervalu $(0;\pi)$. Obě funkce budeme zobrazovat pouze na těchto intervalech. Pro pěkné vykreslení grafu funkce a inverzní funkce jsme použili se studenty tabulku, která obsahovala v prvním řádku hodnoty od –2π do 2π. Všechny hodnoty mezi –2π a 2π byly zadávány s krokem 0,05π. Celkem tedy obsahovala 81 sloupců. U zobrazovaných funkcí byl pouze rozdíl ve vzorcích a v polích tabulky, které bylo potřeba smazat, aby se zobrazila funkce *y* = tg *x* a *y* = cotg *x* jen na intervalu, ve kterém je prostá. Vzorce pro funkci *y* = tg *x* a *y* =arctg *x* jsou: =TG(B2) a =ARCTG(B2).

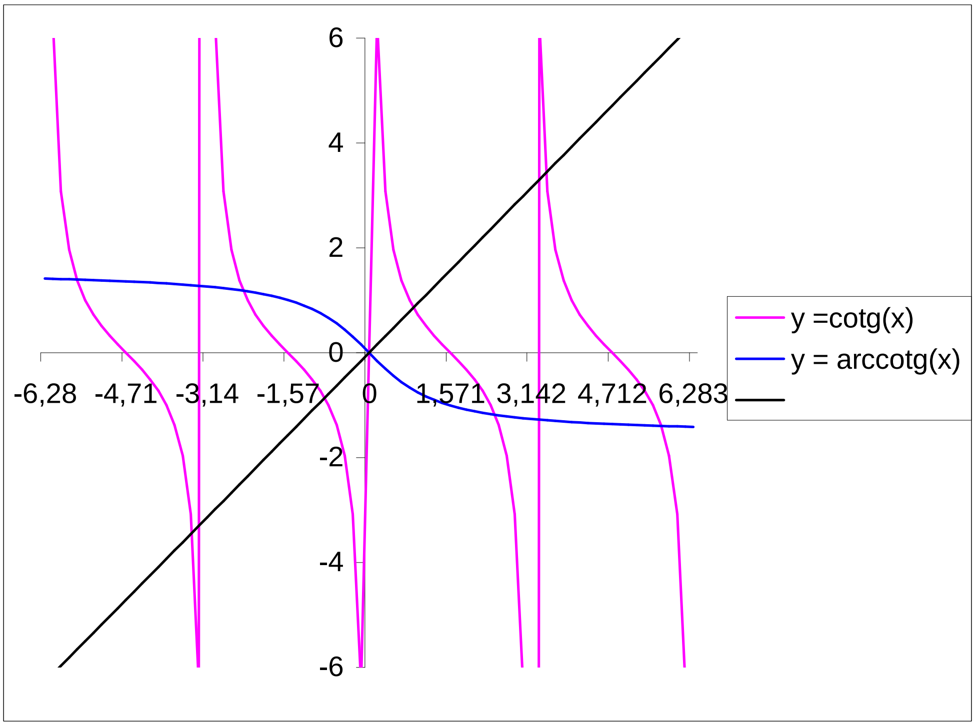


Obr. 40



6
4
2
0
-2
-4
-6
-2π
-3/2π
-π
-π/2
π/2
π
3/2π
2π
y = tgx
y = arctgx
y = x

Obr. 41



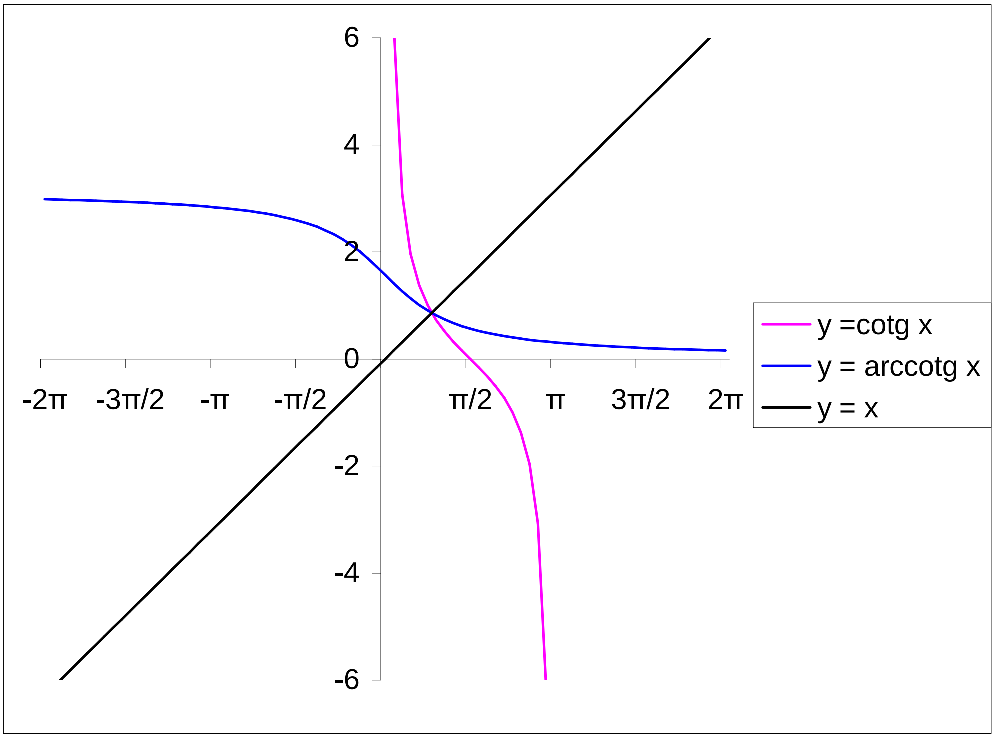
6
4
2
0
-2
-4
-6
-6,28
-4,71
-3,14
-1,57
0
1,571
3,142
4,712
6,283
y =cotg(x)
y = arccotg(x)

Obr. 42

Na obr. 40 je ukázka studentské práce, kde se student nezabýval intervalem, na kterém je funkce *y* = tg *x* prostá, a vzorec, podle kterého program počítá hodnoty funkce, zkopíroval do celého řádku tabulky; dále tu chybí legenda. Obr. 41 je zcela v pořádku.

Naopak funkce *y* = cotg *x* a *y* = arccotg *x* nejsou v programu mezi předdefinovanými funkcemi, tak je potřeba při jejich konstrukci použít znalosti vlastností funkce a vzorce si upravit samostatně. Funkce *y* = cotg *x* je definovaná jako převrácená hodnota k funkci *y* = tg *x* a tomu i odpovídá vzorec pro program MS Excel =1/TG(B2).

Funkci *y* = arccotg *x* jsme zobrazovali se studenty v programu MS Excel podle vzorce tohoto = –ARCTG(B2)+PI()/2.



Obr. 43

Jedna studentská práce je na obr. 42. Tato práce je jedna z nejhorších. Student zde funkci *y* = cotg *x* zobrazil na celém intervalu $(-2\pi;2\pi)$, funkci inverzní má posunutou o $-\frac{\pi}{2}$, v legendě není popsána funkce $y = x$ a posledním detailem je popis osy x pomocí čísel. Dále nevím, proč v legendě má u funkcí x v závorkách. Obr. 43 ukazuje studentskou práci, která je zcela bez připomínek.

Kapitola 12

Shrnutí výuky

Pomocí několika příkladů uvedených v kapitole 4 jsem studenty seznámil se základy pro pochopení pojmu inverzní funkce. První hodinu studenti pracovali v učebně a používali připravené pracovní listy.

Už u příkladů s lineární funkcí začínali někteří studenti tušit o matematické provázanosti funkce a funkce inverzní. Jeden student pravil: „To je jasné, to je funkce opačné operace.“ U prvních příkladů se tato „opačná operace“ hledala celkem snadno, vždyť násobení a dělení je žákům známo již od nižších ročníků a správnost výpočtů jedné matematické operace se ověřuje druhou. Dokonce někteří studenti byli schopni zpaměti z funkčního předpisu lineární funkce určit funkční předpis inverzní funkce. Ani u kvadratických funkcí typu $y = ax^2$, $y = ax^2 + b$, $y = (x + b)^2$ jsem s nalezením funkčního předpisu inverzní funkce nezaznamenal závažnější problémy. A právě důkladné porozumění těmto příkladům vedlo studenty k samostatnému poznání vlastností inverzní funkce a k nalezení aritmetické metody k zjišťování funkčních předpisů inverzních funkcí.

Při dalších hodinách studenti zobrazovali tyto funkce v programu MS EXCEL. Značný čas jsme věnovali pečlivému zformátování výsledných grafů, což nám značně usnadnilo další práci. V této chvíli již většina věděla, jak vypočítat funkční předpis inverzní funkce ze zadaného funkčního předpisu. Ostatní kvadratické funkce studenti zobrazovali pro upevnění dovedností a prohloubení znalostí.

Na začátku třetí hodiny řešili studenti dva příklady spíše pro upevnění nabytých vědomostí a zažití zkušeností při práci s počítačem. Do této chvíle inverzní funkce k zadané funkci byla pro studenty známou funkcí.

V následujícím příkladu, který pro názornost studenti řešili pouze pomocí výpočetní techniky, se setkali s exponenciální funkcí. Hledat funkční hodnoty exponenciální funkce pro jiné než celočíselné hodnoty exponentů je pro studenta střední školy bez použití nějakého technického vybavení (vědecký kalkulátor, počítač, …) nebo matematických tabulek naprosto nemožné. Řešení tohoto příkladu studenti prováděli rovnou pomocí výpočetní techniky. V tuto chvíli jsem dal prostor studentům, aby zkusili najít funkční předpis inverzní funkce k funkci $y = 2^x$. Následně měli svůj odhad ověřit graficky. Studenti se do zajímavé situace pustili s chutí. Věděli, jak bude vypadat graf inverzní funkce, věděli, jak vypadá funkční předpis a graf zadané funkce, ale nemohli přijít na předpis funkce inverzní. Mezi nesprávnými návrhy byly například tyto funkce: $y = 2^{\frac{1}{x}}$, $y = \sqrt[x]{2}$, $y = \sqrt[2]{x}$, $y = 2^{\sqrt{x}}$. Všechny tyto funkce jsme si nechali pomocí programu MS EXCEL graficky zobrazit a následně jako inverzní funkce zamítli.

Pomocí tohoto příkladu jsem definoval logaritmickou funkci. Logaritmická funkce je první funkce, se kterou se studenti ještě nesetkali. Pokud se věnuje dostatečný prostor inverzní funkci, aby studenti pochopili její vlastnosti a zákonitosti, je následné zavedení logaritmické funkce pro studenty pochopitelnější a práce s logaritmy a logaritmickou funkcí snadnější. Jestliže se inverzní funkce studentům předloží jako nástroj k definování logaritmické funkce a jestliže nedojde k náležitému pochopení inverzní funkce studenty, pak mívají studenti s logaritmickou funkcí daleko větší problémy.

Po více než měsíční pauze jsem se k inverzní funkci se studenty vrátil. Důvodem byly cyklometrické funkce. V našem případě se studenti setkali se všemi goniometrickými funkcemi. Tabulky funkčních hodnot doplňovali pomocí matematických tabulek, ve kterých se někteří jedinci zorientovali neuvěřitelně rychle a jiným to trvalo celkem dlouhou dobu. Při doplňování tabulky pro inverzní funkce se téměř všichni studenti v tabulkách orientovali. U goniometrických funkcí se funkční hodnota nedá snadno vypočítat pomocí základních matematických operací, natož pak funkční hodnoty funkcí k nim inverzních. Před přechodem k práci na počítači jsme si tyto inverzní funkce správně matematicky pojmenovali a poté zobrazení goniometrických a cyklometrických funkcí pomocí výpočetní techniky nebyl žádný problém.

Kapitola 13

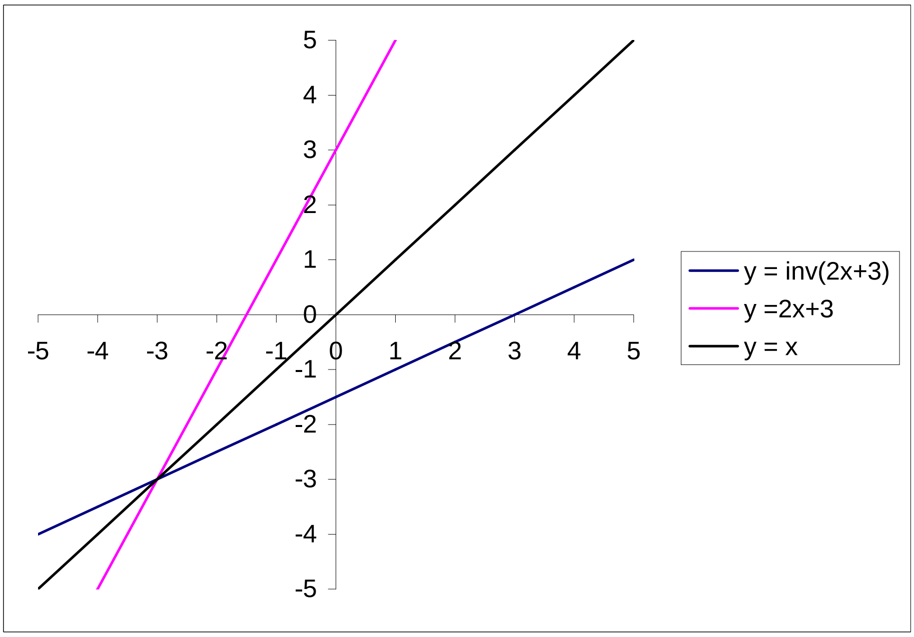
Sbírka řešených příkladů

13. 1. Příklad 1 Sestrojte graf funkce $y = 2x + 3$ a určete funkci inverzní.

Sestavíme tabulku funkce a inverzní funkce. Omezíme se na uzavřený interval $\langle -5; 5 \rangle$. Vzorec, který použijeme v druhém řádku tabulky, bude =2*B1–3. Tento vzorec znamená dvakrát hodnota v buňce B1 mínus tři. Společná tabulka pro funkci a inverzní funkci je:

X	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
2*x*+3	–7	–5	–3	–1	1	3	5	7	9	11	13
inv(2*x*+3)	–4	–3,5	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1

A graf funkce dané, funkce inverzní a funkce $y = x$ je na obr. 44.



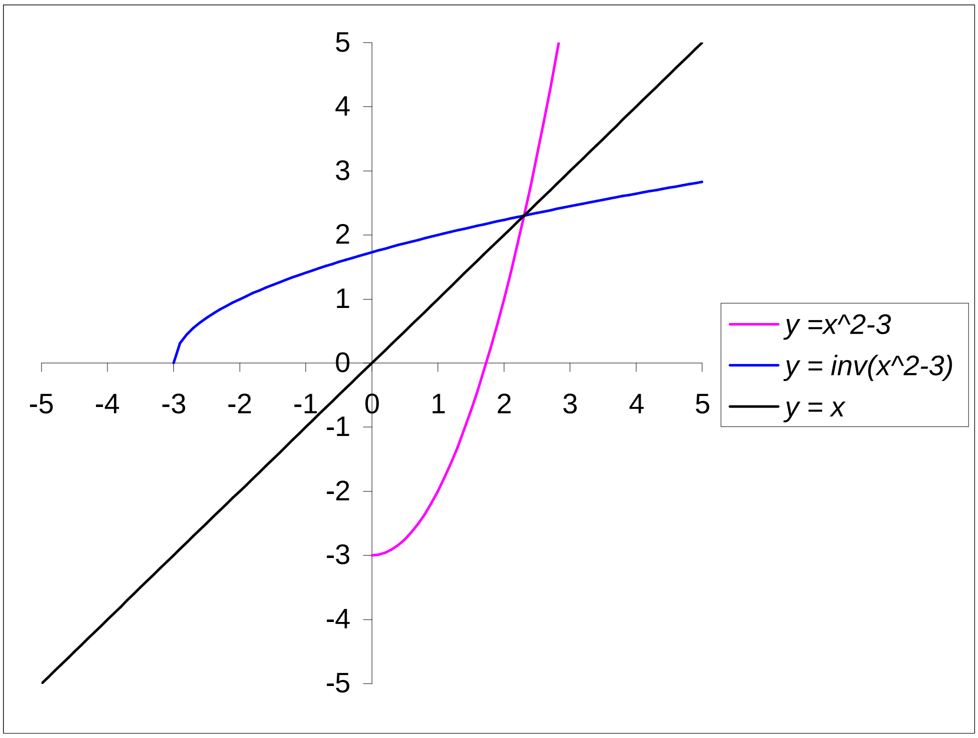
Obr. 44

13. 2. Příklad 2 Sestrojte graf funkce $y = x^2 - 3$ a určete funkci inverzní.

Sestavíme tabulku funkce a inverzní funkce. Omezíme se na uzavřený interval $\langle -5; 5 \rangle$. Pro lepší vykreslení grafu je třeba použít tabulku obsahující více sloupců, zde uvedeme jen celočíselné hodnoty. Vzorec, který použijeme v druhém řádku tabulky, bude =B1*B1–3, nebo =2*POWER(B1;2)–3, kde funkce *POWER* je druhá mocnina čísla v poli B1. Omezíme se na interval, ve kterém je zadaná funkce rostoucí. Společná tabulka pro funkci a inverzní funkci je:

X	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x^2-3	22	13	6	1	–2	–3	–2	1	6	13	22
inv(*x*^2-3)			0	1	1,414	1,732	2	2,236	2,449	2,645	2,828

A graf funkce dané, funkce inverzní a funkce $y = x$ je na obr. 45.

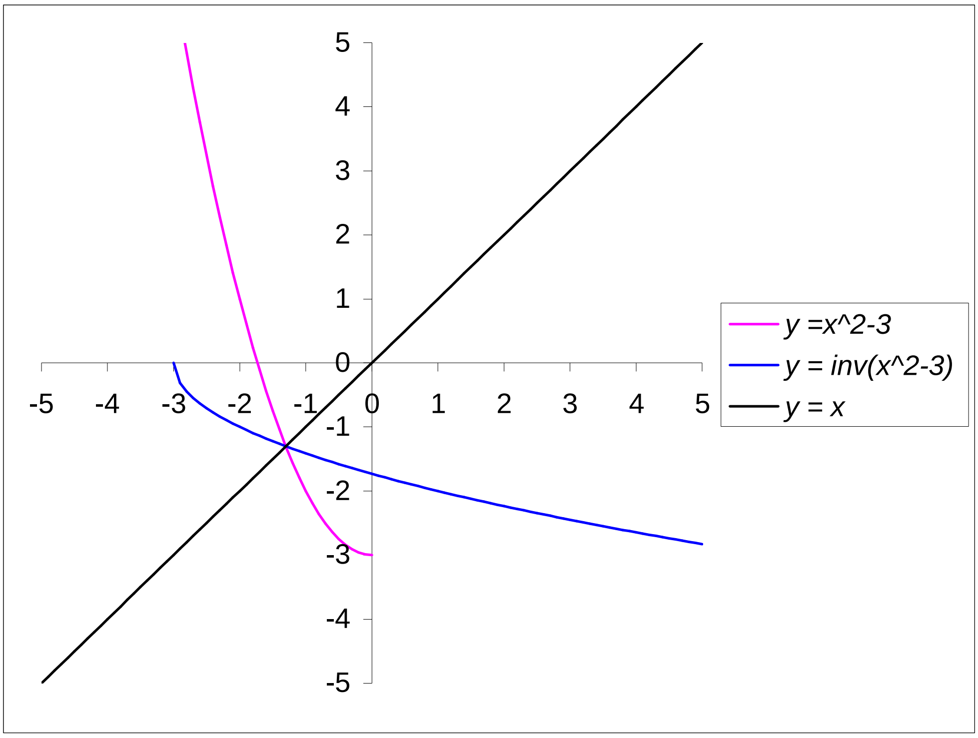


Obr. 16

Pokud budeme pracovat s klesající částí zadané funkce, bude tabulka vypadat takto:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x^2-3	22	13	6	1	–2	–3	–2	1	6	13	22
inv(*x*^2-3)			0	1	–1,41	–1,73	–2	–2,23	–2,44	–2,64	–2,82

A graf je na obr. 46.



Obr. 46

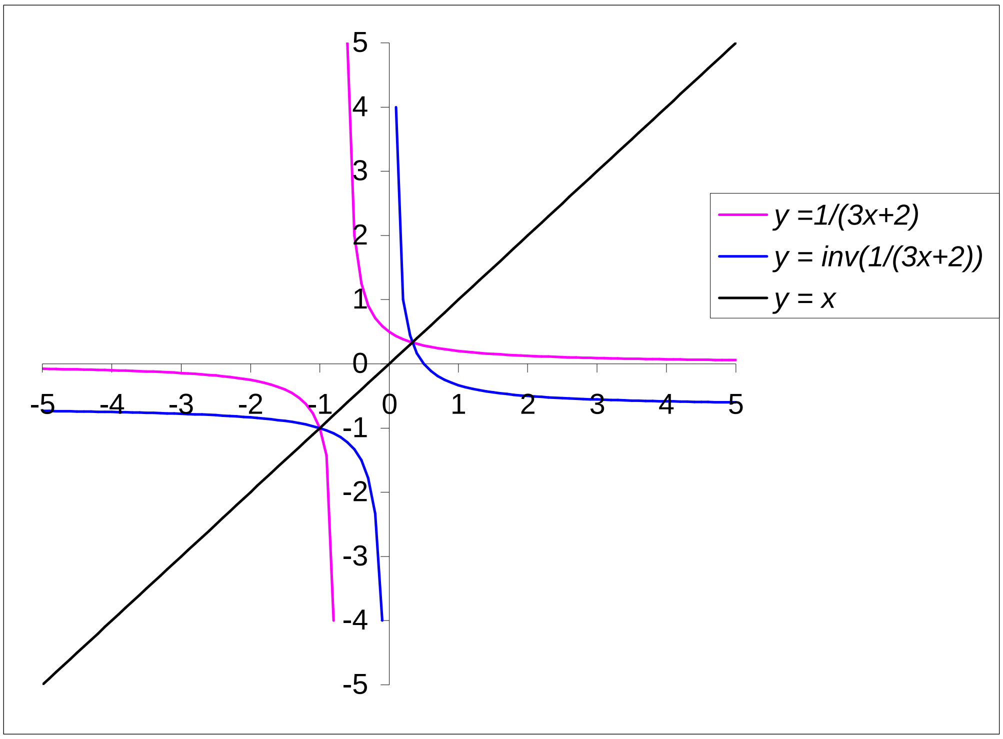
13. 3. Příklad 3 Sestrojte graf funkce $y = \dfrac{1}{3x+2}$ a určete funkci inverzní.

Nejprve sestavíme tabulku funkce. Můžeme se omezit na interval $\langle -5; 5 \rangle$, ve kterém je průběh funkce nejzajímavější, a tabulku sestavit s krokem 0,1. Vzorec bude mít tvar: = 1/(B1*3+2). V některé buňce nám program po zkopírování vzorce napíše „ #DIV/0! “, což znamená, že při výpočtu podle vzorce dochází k dělení nulou. My víme, že pro tuto hodnotu není funkce definovaná. Program, přestože správně rozpozná, že dochází k dělení nulou, při vykreslení grafu počítá právě s nulovou hodnotou. Výsledný graf této funkce pak vypadá spojitě a obě větve hyperboly jsou propojeny přímkou procházející bodem, ve kterém funkce není definována. Smazáním celého obsahu buňky vše napravíme.

Nyní zobrazíme funkci a k ní inverzní funkci a funkci $y = x$ do jednoho grafu. K tomu musíme vytvořit tabulku, která obsahuje tři řádky:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
3*x*+2	–0,07	–0,1	–0,14	–0,25	–1	0,5	0,2	0,12	0,09	0,07	0,05
inv(3*x*+2)	–0,69	–0,7	–0,71	–0,75	–1	–0,5	–0,6	–0,63	–0,64	–0,64	–0,64

Graf nalezneme na obr. 47.



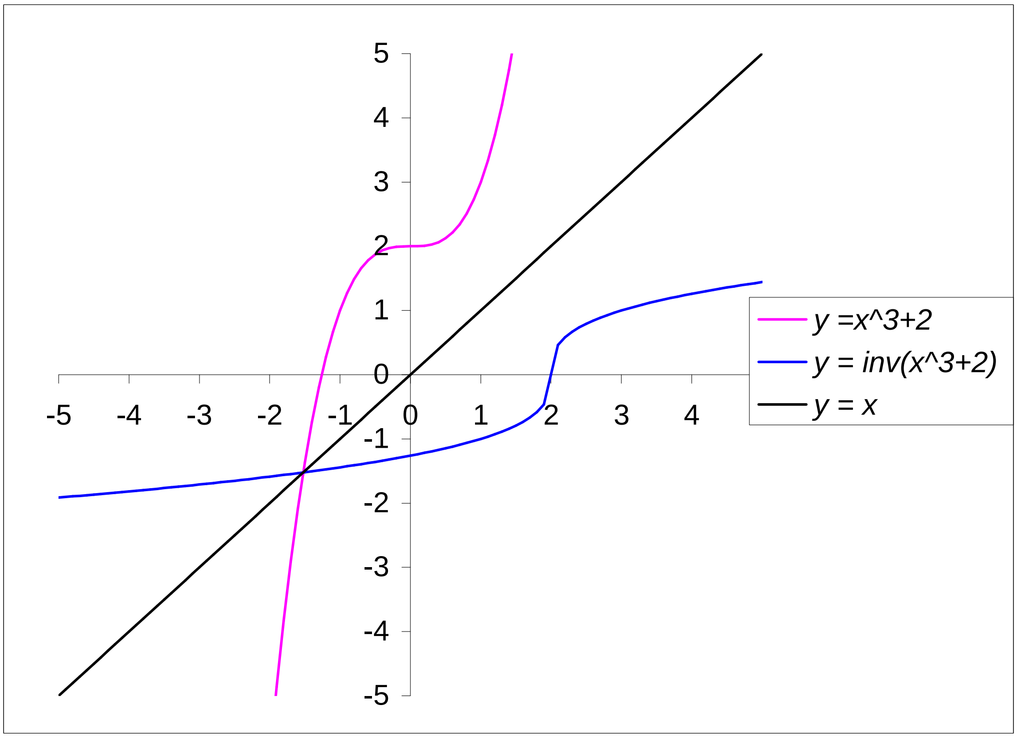
Obr. 47

13. 4. Příklad 4 Sestrojte graf funkce $y = x^3 + 2$ a určete funkci inverzní.

Nejprve sestavíme tabulku funkce; můžeme se omezit na interval $\langle -5; 5\rangle$. Po dosazení vzorce =(POWER(B1;3)+2 a jeho zkopírování nám vyjde tabulka:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
x^3+2	–123	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
inv(*x*^3+2)	–1,91	–1,81	–1,71	–1,58	–1,44	–1,26	–1	0	1	1,26	1,44

Graf je na obr. 48.



Obr. 48

Kapitola 14

Cvičení

1) K funkci $f(x) = 3x$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
2) K funkci $f(x) = 3x - 4$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
3) K funkci $f(x) = x^2$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
4) K funkci $f(x) = x^2 - 3$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
5) K funkci $f(x) = (x - 3)^2$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
6) K funkci $f(x) = x^2 - 2x + 5$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
7) K funkci $f(x) = x^3 - 3$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
8) K funkci $f(x) = 2^x - 3$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
9) K funkci $f(x) = 2^{x-3}$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
10) K funkci $f(x) = 2^{x-3} + 2$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
11) K funkci $f(x) = \sin 2x$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.
12) K funkci $f(x) = \sin(2x + 3)$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

13) K funkci $f(x) = \sin(2x + 3) + 3$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

14) K funkci $f(x) = \cos 0{,}5x$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

15) K funkci $f(x) = \cos(2x + 1)$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

16) K funkci $f(x) = \mathrm{tg}\,(x + 2)$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

17) K funkci $f(x) = \mathrm{tg}\,x + 3$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

18) K funkci $f(x) = \mathrm{tg}\,(x - 3) + 2$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

19) K funkci $f(x) = \mathrm{cotg}\,x - 3$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

20) K funkci $f(x) = \mathrm{cotg}\,(2x - 3)$ určete funkční předpis pro inverzní funkci, sestrojte graf funkce a inverzní funkce.

Kapitola 15

Závěr

Cílem mé práce je naučit studenty střední školy látku inverzní funkce jiným něž běžně používaným způsobem. Na většině gymnázií a na středních školách, s jejichž studenty jsem se setkal, se inverzní funkce zavádí pomocí definice nebo se ukazuje na jednom řešeném příkladu. Následně se pak studentům ukáží její vlastnosti, a to vše, pokud máme štěstí, v maximálně dvou hodinách.

Vyzkoušel jsem jiný způsob výuky, který jsem prováděl v hodinách matematiky ve třech druhých ročnících na Soukromé obchodní akademii Stodůlky za pomoci pracovních listů a výpočetní techniky. Ve standardní sadě učebnic, které škola používá, kapitola inverzní funkce není. Pro rutinní výpočty a kreslení grafů funkcí jsme používali výpočetní techniku s programovým vybavením MS EXCEL. V první fázi jsem se studenty postupoval od zadání funkce přes vyplnění tabulky k sestrojení grafu. Dále pak studenti hledali první řádek tabulky k zadanému druhému řádku a nakonec sestrojili graf inverzní funkce. Analytické vyjádření inverzní funkce v prvních příkladech odhadovali a nakonec někteří studenti sami přišli na postup výpočtu, pomocí kterého z rovnice funkce vyjádří (vypočtou) rovnici inverzní funkce. Další inverzní funkce a jejich grafy studenti zobrazovali pomocí programu MS EXCEL, kde neopomenutelnou částí práce bylo studenty seznámit s korektním zformátováním grafu i se správnou syntaxí při zadávání vzorců pro usnadnění rutinních výpočtů. Jedním z hlavních cílů práce bylo najít inverzní funkci k funkci $y = 2^x$, čímž jsem připravil půdu pro zavedení logaritmické funkce.

Celá práce se studenty zabrala asi 6 až 8 vyučovacích hodin, kde mimo látky inverzní funkce jsme procvičili sestrojování grafů funkcí lineárních, kvadratických, lineárních lomených, mocninných, exponenciálních a goniometrických. Každý student měl samostatný prostor, aby si sám vyzkoušel práci při sestrojování grafu funkce, což je velmi vhodné pro názornost a není to jen obkreslování z tabule nebo učebnice. Poměrně zdlouhavá činnost vyvolala ve studentech potřebu zefektivnění práce a přinutila studenty k samostatnému přemýšlení o problému. Nakonec studenti sami přišli na zákonitosti týkající se této problematiky. V závěrečných hodinách jsem inverzní funkci použil jako prostředek k definování logaritmických a o měsíc později i cyklometrických funkcí.

Logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce studenti považují za funkce jiné (divné), přestože se dá funkční hodnota odměřit na jednotkové kružnici, vyčíst z tabulek, nebo spočítat na kalkulačce. Možná právě proto, že neexistuje žádná aritmetická operace vedoucí k zjištění funkčních hodnot a propojenost aritmetiky a geometrie je na školách podceňována, nejsou logaritmické, goniometrické a cyklometrické funkce studenty oblíbeny.

Při mém pedagogickém působení na gymnáziu jsem zpozoroval, že logaritmy, logaritmické rovnice a goniometrické rovnice patřili k nejméně oblíbeným kapitolám a výsledky studentů v písemných pracích z těchto témat k pracím s horší průměrnou známkou. Po přechodu na SOA jsem se rozhodl vyzkoušet něco nového. Protože jsem učil matematiku ve všech ročnících této školy, mohl jsem porovnávat výsledky písemných prací u tříd, které jsem problematiku logaritmů neučil já, ale kolega loni, a u tříd, které jsem tuto problematiku učil způsobem výše popsaným. Musím říci, že studenti třetích a čtvrtých ročníků měli z písemných opakování logaritmů a logaritmických a exponenciálních rovnic horší výsledky a při ústním opakování reagovali pomaleji a často chybněji než studenti druhých ročníků, které jsem učil inverzní funkci já. Nemohu opomenout odstup trvající přinejmenším půl roku od doby, kdy byla studentům třetího a čtvrtého ročníku látka logaritmus vysvětlena, který se mohl projevit pozapomněním problematiky a tím i vetší chybovostí a horší průměrnou známkou.

Studenti druhých ročníků při dílčích a i při kontrolních čtvrtletních prácích vykazovali lepší výsledky a dosahovali lepších průměrných známek z logaritmů, logaritmických a exponenciálních rovnic.

Domnívám se, že studenti, kteří absolvovali výuku tímto způsobem, mají daleko lepší vhled do problematiky logaritmických funkci než většina ostatních studentů středních škol, se kterými jsem se setkal.

Tato cesta se mi zdá být názornější a z ohlasů studentů pro ně příjemnější. Studenti sami odhalí princip inverzní funkce a následně pak logaritmus, a logaritmické rovnice jsou pro ně pochopitelnější. Vědí, jak vypadá logaritmická funkce a logaritmus není pro studenty jen výraz a práce s logaritmy není jen dosazování do vzorců s nic neříkajícími písmeny.

Je škoda, že jsem nemohl setrvat na SOA déle, abych mohl i s časovým odstupem porovnávat, zda budou lepší výsledky studentů i po prázdninách či před maturitou.

Literatura

[1] Bartsch, J., H., *Matematické vzorce*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.

[2] Hejný, M. a kol., *Teória vyučovánia matematiky 2*, Slovenské pedagogické nakladatelstvo, Bratislava, 1988.

[3] Horák, S., Jalůvka, V., Jirásek, F., Kroupová, J., Polášek, J., *Požadavky z matematiky pro přijímací zkoušky na vysokých školách technických*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1987.

[4] Jarník, V., *Diferenciální počet (1)*, Academia, Praha, 1984.

[5] Jirásek, F., Baniš, K., Horák, S., Vacek, M., *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU, 1. část*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1986.

[6] Jirásek, F., Kriegelstein, E., Tichý, Z., *Sbírka řešených příkladů z matematiky I*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.

[7] Koldner, J., *Sbírka úloh z matematiky pro obchodní akademie*, Svitavská tiskárna, Svitavy, 1998.

[8] Odvárko, O., *Matematika pro gymnázia – Funkce*, Prometheus, Praha, 2001.

[9] Odvárko, O., *Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia - Funkce*, Prometheus, Praha, 2006.

[10] Odvárko, O., Calda, E., Kolouchová, J., Řepová, J., *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 6. část*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989.

[11] Odvárko, O., Calda, E., Kolouchová, J., Řepová, J., *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 6. část*, Prometheus, Praha, 1994.

[12] Odvárko, O., Řepová, J., Skřítek, L., *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 2. část*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1984.

[13] Odvárko, O., Řepová, J., Skřítek, L., *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 2. část*, Prometheus, Praha, 1994.

[14] Petáková, J., *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Prometheus, Praha, 2004.

[15] Polák, J., *Přehled středoškolské matematiky*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1991.

[16] Rosická, M., Eliášová, L., *Opakování elementární matematiky. Příprava k přijímací zkoušce*, Vysoká škola ekonomická v Praze, Praha, 1994.

[17] http://inverzni-funkce.navajo.cz/

[18] http://cs.wikipedia.org/wiki/Inverzní_funkce

[19] http://www.matematika.havrlant.net/sk/funkce

[20] http://www.aristoteles.cz/matematika/funkce/inverzni/inverzni-funkce.php

[21] http://www.cojeco.cz/index.php?detail=1&id_desc=39255&s_lang=2&title=inverzn%ED%20funkce

[22] http://encyklopedie.seznam.cz/heslo/52888-inverzni-funkce

[23] http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_function

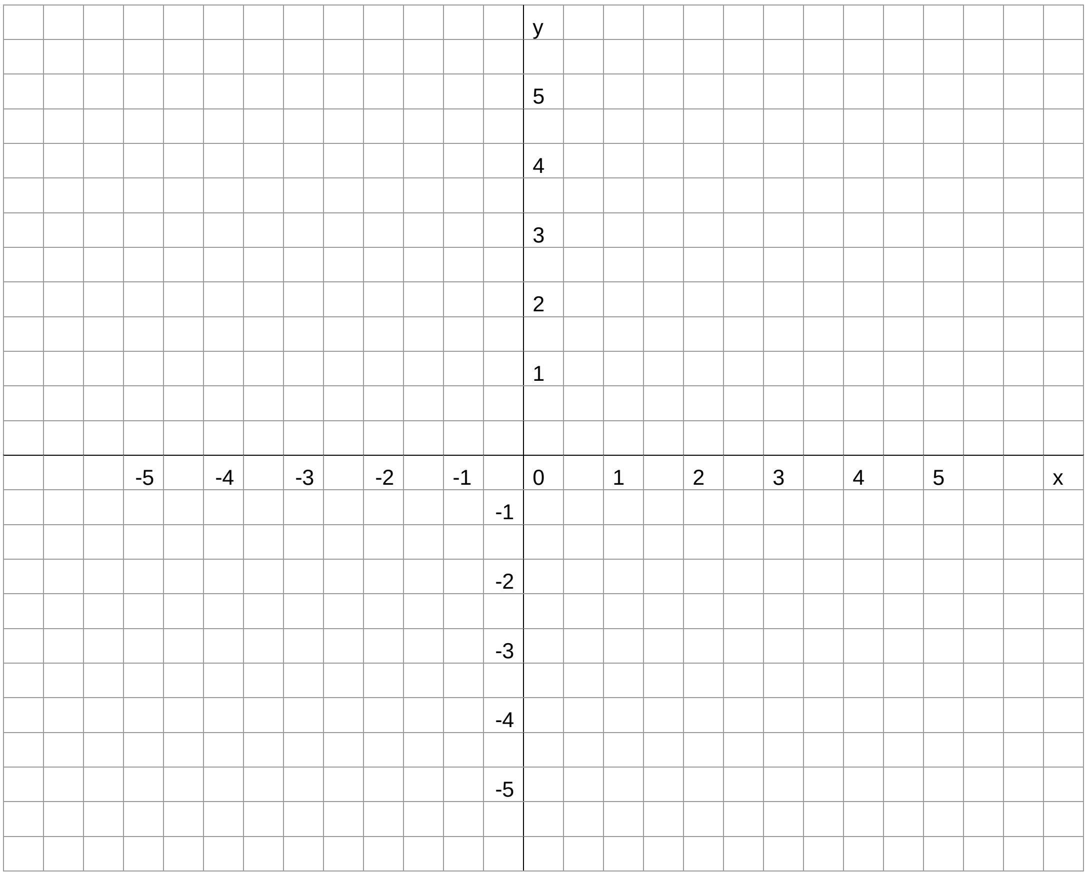
[24] http://www.uncwil.edu/courses/mat111hb/functions/inverse/inverse.htm

Přílohy

Příloha č. 1

Je dána funkce $y = 3x + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y = 3*x*+2											



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x											
y = 3*x*+2	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

y = 3*x*+2	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x											

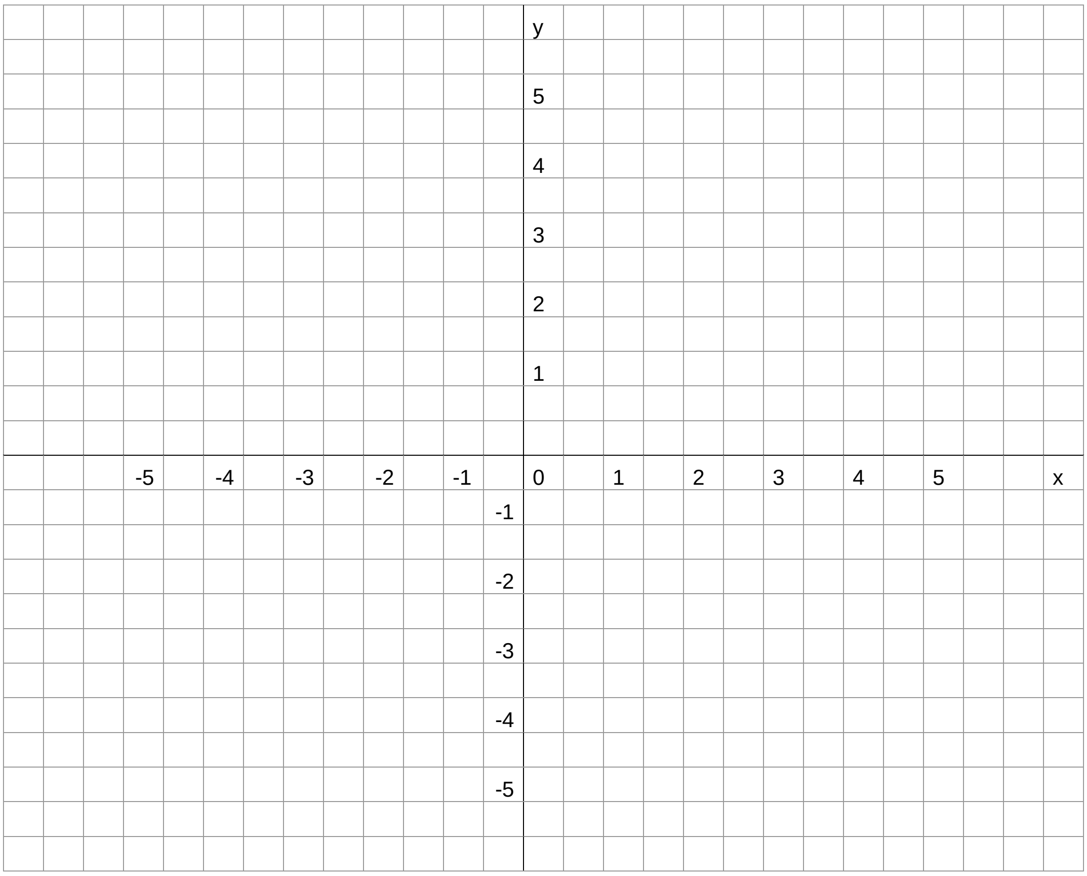
Určete funkční předpis této nové funkce.

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

Příloha č. 2

Je dána funkce $y = x^2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$											



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x											
$y = x^2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

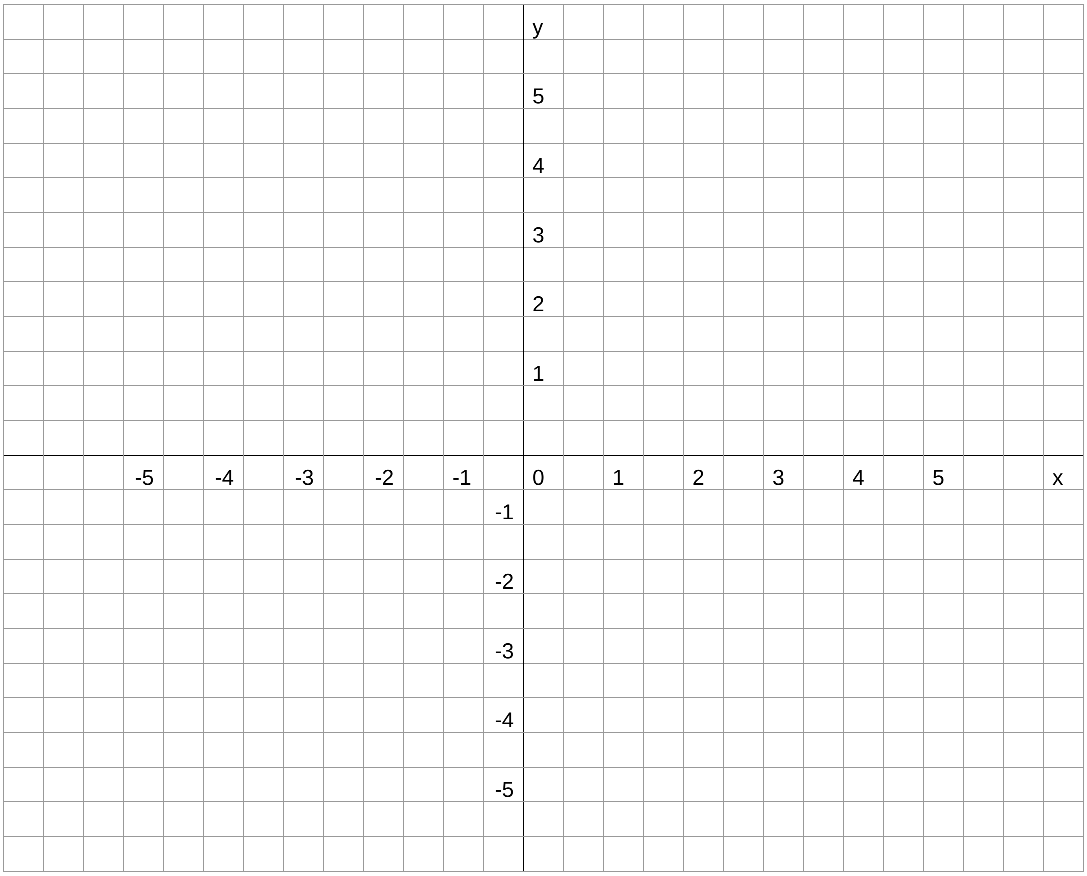
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

Určete funkční předpis této nové funkce. Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

Příloha č. 3

Je dána funkce $y = x^2 + 2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 + 2$											



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x											
$y = x^2 + 2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

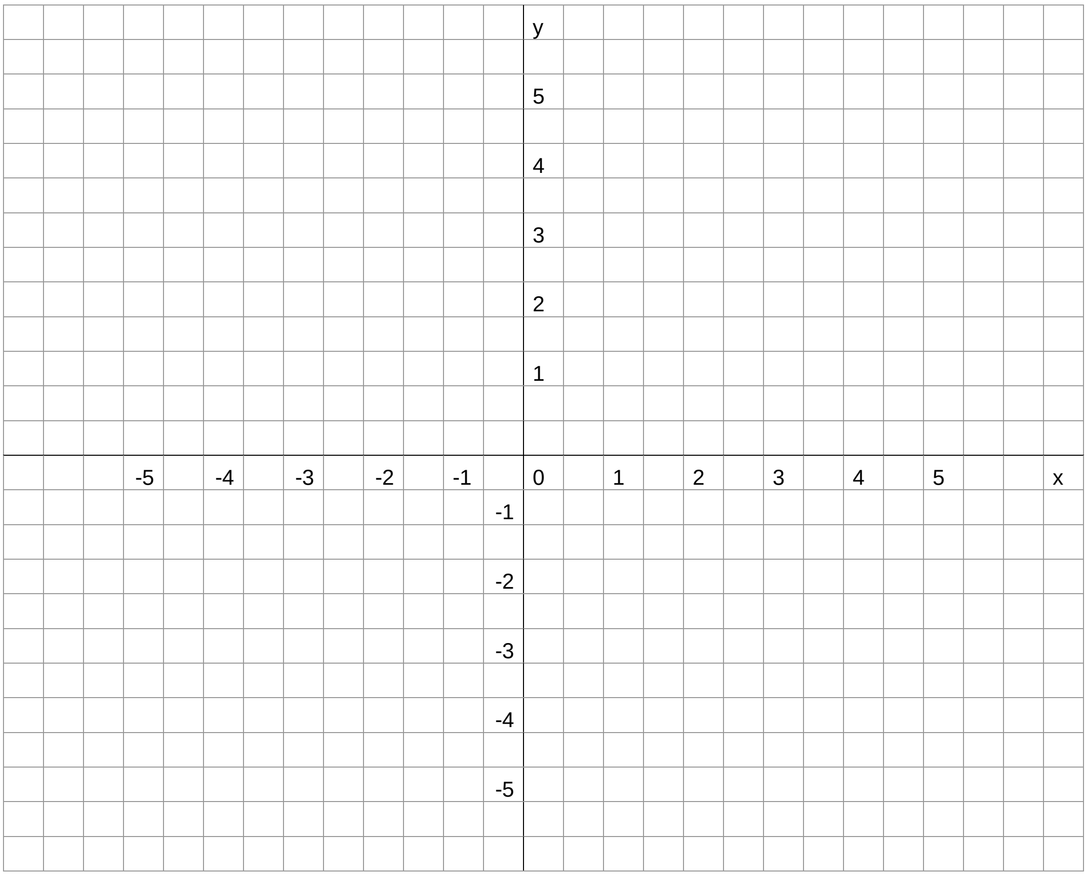
Určete funkční předpis této nové funkce.

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

Příloha č. 4

Je dána funkce $y = (x + 2)^2$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x + 2)^2$											



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x											
$y = (x + 2)^2$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y											

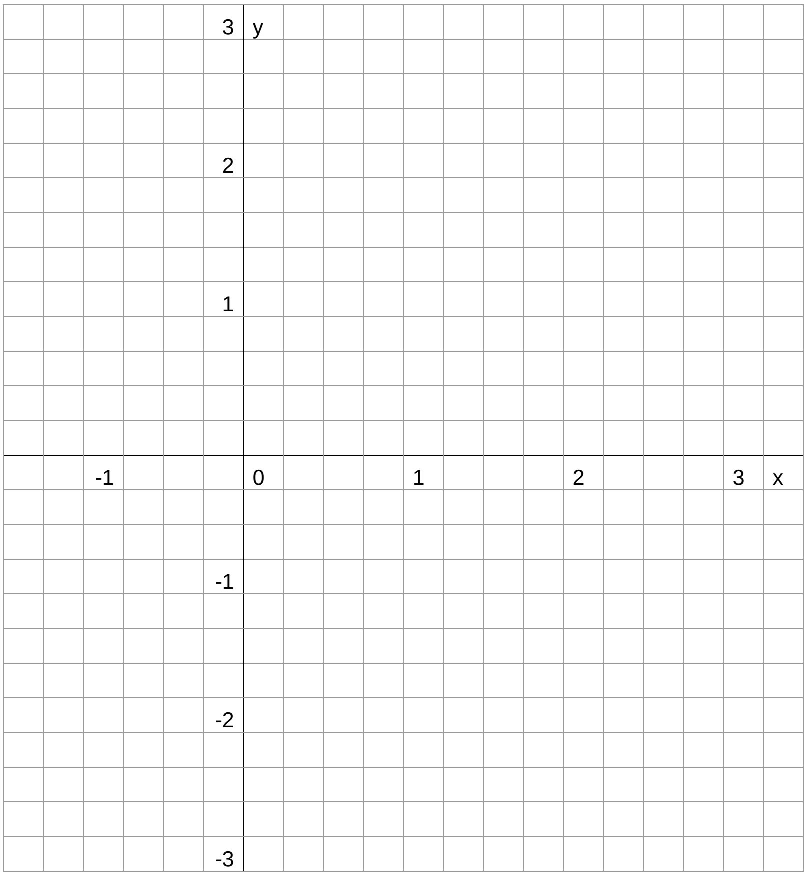
Určete funkční předpis této nové funkce.

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?

Příloha č. 5

Je dána funkce $y = \sin x$, doplňte funkční hodnoty do tabulky, určete definiční obor funkce a sestrojte graf.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y = sin *x*										



Určete hodnoty prvního řádku tabulky funkce.

x										
y = sin *x*	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5

Zaměňte první a druhý řádek tabulky. Do stejného obrázku sestrojte graf této nové funkce.

y = sin *x*	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
x										

Určete funkční předpis této nové funkce.

Jaký vztah je mezi zadanou a nově vzniklou funkcí?